APPRENDRE

GROUPE THÉMATIQUE D'EXPERTISE 4

OUTIL DE FORMATION DES ENSEIGNANTS

2023

GUIDE pour le formateur d'enseignants de mathématiques

Des outils didactiques pour penser, organiser et lire la classe

AUF AGENCE UNIVERSITAIRE DE LA FRANCOPHONIE

AFD AGENCE FRANÇAISE DE DÉVELOPPEMENT

LE PROGRAMME APPRENDRE

Le programme APPRENDRE a pour objectif de mobiliser de l'expertise dans le domaine pédagogique, didactique et universitaire. Il accompagne les ministères de l'Éducation de 26 pays francophones en matière de renforcement des capacités des enseignants du primaire et du secondaire. À la demande de ces pays, APPRENDRE mobilise un réseau d'experts et de partenaires (praticiens, cadres éducatifs, universitaires et chercheurs) pour des missions de formation, d'audit, de diagnostic et d'ingénierie.

Les appuis mis en place par APPRENDRE ciblent prioritairement les directions et institutions nationales en charge de la formation initiale et continue des enseignants dans les pays concernés. L'identification des actions à mener s'appuie sur le recueil des besoins des acteurs, dans une démarche partenariale fondée sur le dialogue et l'échange. Chaque pays définit son plan d'action (PTA) en étroite collaboration avec les experts du programme. Ensemble, ils établissent un diagnostic, mènent une réflexion et déterminent les actions à mettre en place.

APPRENDRE n'est pas un dispositif de formation. Il n'a pas vocation à se substituer aux financements sectoriels de l'éducation dans les pays éligibles. Ses appuis, ponctuels et ciblés, s'inscrivent en amont des projets nationaux conçus et pilotés par les pays et viennent renforcer les capacités de conception et de suivi des ministères.

CE GUIDE A ÉTÉ CONÇU PAR :

Adolphe Cossi ADIHOU, professeur titulaire de didactique des mathématiques à l'Université de Sherbrooke au Québec (Canada)

Denis BUTLEN, professeur des universités émérite à l'université de CY Paris-Cergy Université (France)

Jeanne KOUDOGBO, professeure agrégée de didactique des mathématiques à l'Université de Sherbrooke au Québec (Canada)

AVEC LA COLLABORATION DE :

Sylvie COPPE, retraitée, anciennement maîtresse d'enseignement et de recherche à l'Université de Genève (Suisse)

Gervais AFFOGNON, docteur en didactique des mathématiques, chargé de cours au lycée et dans les écoles de formation du Bénin

SOUS LA COORDINATION DE : Denis BUTLEN

PHOTO DE COUVERTURE : EPP d'Houndjohoundji (Bénin) © APPRENDRE 2019 – Joannès DOGLO

ÉDITION ET CORRECTION : Sidonie HAN

CONCEPTION GRAPHIQUE ET MISE EN PAGE : Alexandre LOURDEL

Paris, 2023

GROUPE
THÉMATIQUE
D'EXPERTISE
4

OUTIL
DE **FORMATION**
DES ENSEIGNANTS

2023

APPRENDRE

GUIDE

pour le formateur d'enseignants de **mathématiques**

Des outils didactiques pour penser, organiser et lire la classe

AUF AGENCE UNIVERSITAIRE DE LA FRANCOPHONIE

AFD AGENCE FRANÇAISE DE DÉVELOPPEMENT

SOMMAIRE

SOMMAIRE

Sommaire

Sommaire

Remerciements

MERCI à l'ensemble de l'équipe de coordination du programme APPRENDRE pour la confiance et l'appui qu'ils ont accordés à ce projet, ainsi qu'aux différents responsables régionaux du programme pour leur aide dans l'organisation et le suivi des ateliers de formation et du webinaire qui sera un moment fort de la diffusion de cette ressource.

Un grand merci aux différents experts associés qui nous ont accompagnés dans l'organisation et la conduite des ateliers de formation : **Bessan Philippe KAKPO** (Bénin), **Solonge Viviane WANDJI** (Cameroun), **Aimé Hubert MAZIKOU** et **Armand Jean Blaise LOUOUAMOU** (Congo), **Abdoulkader ILTIREH** (Djibouti), **Amadou MAMOUDOU** et **Moussa MOHAMED SAGAYAR** (Niger), **Betom MBAIRAREOU** (Tchad), **René Kodjovi WODOMÉ** et **Matheyendou BLENOUME** (Togo). Ces ateliers ont permis de penser, d'expérimenter et de faire évoluer les démarches et les outils présentés dans ce guide.

Nous tenons plus particulièrement à remercier **Bessan Philippe KAKPO**, expert associé du Bénin (primaire et secondaire) qui, dès le début, a énormément contribué en nous aidant à mettre en œuvre un dispositif de formation.

Merci aussi aux nombreux participants des différents ateliers qui ont contribué à la production des ressources figurant dans les différents chapitres.

Nous tenons enfin à remercier l'**Agence universitaire de la Francophonie** et l'**Agence française de développement** pour leur soutien logistique et financier au **programme APPRENDRE** et à la production de cette ressource.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

CE GUIDE est le résultat d'une expérimentation collective et d'une réflexion de plusieurs années menées par les experts intervenant dans les ateliers de formation de formateurs qui se sont déroulés dans une dizaine de pays, dans le cadre du programme APPRENDRE[1]. Le contenu du guide est construit à partir de cas pratiques issus des formations dispensées dans le cadre du programme APPRENDRE et se veut être un outil à utiliser par des formateurs de formateurs, mais aussi par des enseignants dans le cadre d'autoformations.

Le guide est aussi et avant tout le résultat d'une synthèse de productions coconstruites entre participants et experts lors de ces actions de formation. Les participants et les experts associés de ces formations sont des cadres ou des formateurs de formateurs des ministères de l'Éducation des pays cités. Ces actions ont pour objectif principal le renforcement de leurs compétences didactique en vue de mieux former les enseignants de mathématiques. Elles doivent déboucher sur la production de documents enrichissant la réflexion sur les pratiques et stratégies de formation des pays concernés.

Ces productions ont été testées, améliorées et contextualisées afin de prendre en compte les objectifs spécifiques à chaque atelier et les conditions institutionnelles et sociales d'exercice des enseignants dans les pays concernés. Un travail de synthèse, d'échanges et de réécriture collective a ensuite permis aux rédacteurs de décontextualiser ces productions afin qu'elles puissent être diffusées plus largement et constituer une référence commune.

Le guide comporte des synthèses présentant des outils issus de la recherche en vue du traitement d'une question professionnelle (élaborer des fiches pédagogiques, construire une progression, analyser une séquence d'enseignement, analyser et traiter des erreurs d'élèves, etc.), ainsi que des exemples de productions et de ressources issus des livrables des ateliers, dont la rédaction a été partiellement revue et décontextualisée afin qu'ils puissent être partagés par des formateurs de différents pays. Un glossaire précisant les différents concepts de didactique des mathématiques utilisés se trouve dans un document à part en complément de ce guide. Des références bibliographiques figurent en fin d'ouvrage.

Afin de développer ces différents points, nous abordons successivement des thèmes qui guident nos travaux dans six chapitres. Chaque chapitre se termine par des références bibliographiques spécifiques.

1 Il s'agit du Bénin, du Burkina Faso, du Burundi, de Djibouti, du Cameroun, du Congo, du Mali, du Maroc, du Niger, du Tchad, du Togo.

1. Le premier chapitre présente les principes sur lesquels repose la formation et les bases théoriques et méthodologiques qui les structurent. Il met en évidence quelques outils théoriques, conceptuels et méthodologiques éprouvés dans la recherche et la formation en didactique des mathématiques et au service de la formation à l'enseignement des mathématiques, présentant ainsi l'utilité et l'intérêt de cette didactique.
2. Le chapitre 2 est d'abord consacré à une synthèse non exhaustive des notions de « connaissance », « savoir », « concept ». Les différents édifices théoriques ont développé ces notions mais nous avons fait le choix de nous centrer sur des outils issus notamment de la théorie des champs conceptuels et de la théorie anthropologique du didactique. Ces outils permettent de mieux comprendre le processus de conceptualisation en mathématiques en lien avec un enseignement donné, de saisir comment s'articulent différentes conceptions mais aussi comment différents concepts se construisent et interagissent, et enfin quelle est leur place dans le curriculum, dans une progression ou une programmation. Dans un second temps, nous présentons des exemples de mise en œuvre de ces outils : analyse conceptuelle, carte conceptuelle et cartographie continuum notamment. Il s'agit davantage d'une approche macro de ces questions d'enseignement.
3. Le chapitre 3 porte sur les outils nécessaires à la conception de fiches pédagogiques, à la construction de séquences et séances de mathématiques. Bien que l'élaboration d'une fiche pédagogique nécessite de s'inscrire dans une réflexion générale (programmation dans le temps, prise en compte des curricula), l'approche que nous développons est plutôt de type méso (séquence) ou micro (séance). Là encore, si différentes approches théoriques permettent d'éclairer le travail d'élaboration de fiches pédagogiques, les outils didactiques que nous mobilisons à l'occasion de cette deuxième étude relèvent davantage de la théorie des situations didactiques et de la dialectique outil/objet. Comme pour le chapitre précédent, des exemples de fiches pédagogiques sont proposés sur différents thèmes mathématiques, ainsi que des exemples de jeux à usage didactique destinés au formateur comme au formé.
4. Le chapitre 4 présente deux exemples de mise en œuvre de ces outils (analyse conceptuelle, cartographie continuum, carte conceptuelle et fiche pédagogique) respectivement pour l'enseignement des fractions et l'enseignement de la numération.
5. Le chapitre 5 cible les notions d'erreur, d'obstacle et leur traitement, notamment en termes de remédiation. Les outils mobilisés relèvent de différents travaux et approches théoriques, didactiques mais aussi épistémologiques ou cognitifs.
6. Enfin, le chapitre 6 présente des outils issus de la recherche pour analyser des pratiques de classe (grille d'analyse d'une séance de mathématiques en présentiel ou filmée). C'est l'occasion de travailler le lien entre différents moments de l'activité du professeur : avant, pendant et après la classe.

Une conclusion générale complète le guide. Elle est suivie d'une bibliographie qui présente les références générales et transversales qui ne sont pas citées spécifiquement dans les chapitres, mais qui sont des références qui nous guident dans nos travaux. Une sitographie et des sites de jeux complètent ce guide.

Un glossaire[2] reprenant les différentes définitions de concepts didactiques édité séparément accompagne ce guide. Il permet au lecteur de se repérer dans les différentes présentations, mais il peut être utilisé indépendamment comme un outil supplémentaire pour la formation.

2 Dans la suite du document, nous utiliserons les références suivantes pour désigner les trois glossaires dont nous nous sommes inspirés :

- [1] Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques rédigé en 1998 et mis à jour en 2010 et consultable en ligne : http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf
- [2] Glossaire de la Copirelem, cité par Briand, J., Chevalier, M. C. Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques. Hatier Pédagogique et consultable en ligne : https://arpeme.fr/documents/243B0037BC4A2911EBF.pdf
- [3] Butlen, D. (2007). Calcul mental entre sens et technique (pp. 216-223). Presses universitaires de Franche-Comté.

CHAPITRE

1

PRINCIPES DE FORMATION ET RÉFÉRENCES THÉORIQUES

1 INTRODUCTION

Nous exposons ici les éléments théoriques qui ont servi de fondement aux contenus, scénarios et outils de formation mobilisés et testés par les auteurs lors des ateliers qu'ils ont animés dans le cadre du programme APPRENDRE. Il s'agit dans un premier temps des principaux résultats de recherches anglo-saxonnes et francophones sur les savoirs des enseignants de mathématiques et sur les stratégies de formation mises en œuvre par les formateurs. Dans un second temps, les auteurs explicitent les principes de formation qui les guident dans leurs pratiques de formation.

2 DES RECHERCHES EN DIDACTIQUE À LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

De nombreuses analyses de chercheurs et formateurs reconnus internationalement, originaires de l'espace mathématique francophone – mais aussi anglo-saxon, africain et asiatique –, soulignent la nécessité de s'appuyer sur les résultats et démarches de la didactique des mathématiques pour outiller les personnes formatrices et pour penser la formation de formateurs d'enseignants, ou plus largement la formation des enseignants. Cela s'est d'ailleurs traduit dans de nombreux pays par la mise en œuvre, dans le cadre de la formation initiale professionnelle des enseignants ou professeurs, de cursus intégrant des modules d'initiation à la recherche en didactique et en sciences de l'éducation.

2.1 La didactique des mathématiques

La didactique des mathématiques analyse, à propos d'un contenu donné, les rapports entre enseignement et apprentissage. « La didactique des mathématiques est un champ de recherche au confluent de plusieurs autres champs disciplinaires (mathématiques, psychologie cognitive, psychologie sociale, sociologie, épistémologie, etc.). Elle se propose d'étudier les rapports existants entre enseignement et apprentissage dans le contexte spécifique des mathématiques. Ainsi, elle étudie les processus de transmission et d'acquisition des connaissances relatives au domaine spécifique de cette discipline ou des sciences voisines avec lesquelles elle interagit. Elle décrit et analyse les difficultés rencontrées et propose des moyens pour aider les professeurs, les élèves et les étudiants à les surmonter, et notamment pour faire du savoir enseigné, un savoir vivant, fonctionnel et opératoire » (Encyclopaedia Universalis[1]).

La didactique des mathématiques propose une approche systémique des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage en considérant les relations existantes entre le professeur, l'élève et le savoir, sachant qu'il faut resituer ces derniers dans un milieu institutionnel (nous renvoyons le lecteur au chapitre 3 pour davantage de précision sur cette approche).

2.1.1 Quelques hypothèses préalables admises par la communauté des didacticiens des mathématiques

Les didacticiens s'accordent pour dire qu'il ne suffit pas de connaître les mathématiques pour savoir les enseigner. En particulier, il y a lieu de tenir compte des sujets-apprenants, de leurs connaissances, de leur potentiel et de leur diversité éventuelle pour tenter d'optimiser l'enseignement et, subséquemment, l'apprentissage.

Il existe des régularités dans le processus d'apprentissage scolaire. Du côté des élèves, cela impose, pour les mettre en évidence, une unité de découpage adéquat : le champ conceptuel. Celui-ci est un espace de problèmes ou de situations-problèmes dont le traitement implique des concepts et des procédures de plusieurs types en étroite connexion (voir chapitre 2).

Les didacticiens s'inscrivent dans une approche problématique des mathématiques et de leur enseignement. Ils admettent que les concepts mathématiques sont apparus comme des réponses à des problèmes (souvent de nature mathématique). Ils admettent aussi le rôle important joué par l'action dans le processus d'apprentissage.

2.2 Ce que nous retenons des recherches en didactique des mathématiques sur les pratiques enseignantes et sur la formation

L'objet de nombreuses recherches en didactique des mathématiques s'est progressivement déplacé (sans s'y limiter) de l'élève et des situations vers le professeur. Presque tous les courants de recherche en didactique ont été concernés par ce mouvement. C'est notamment le cas de la théorie anthropologique du didactique (TAD) qui a développé une approche praxéologique à partir des travaux de Chevallard et de son équipe (voir

1 www.universalis.fr/encyclopedie/mathematiques-didactique-des/ consulté le 18/09/2023.

chapitre 2) et, pour une moindre part, de la théorie des situations didactiques (TSD) avec notamment les travaux de Perrin-Glorian, Margolinas et Bosch (voir chapitre 3). Ce changement de regard, davantage focalisé sur l'enseignant en tant que tel, va se traduire par la constitution progressive de nouveaux cadres théoriques. C'est le cas, d'une part, de la théorie de l'action conjointe (TACD, avec les contributions de Mercier, Sensevy, Schubauer-Léoni, Assude) et, d'autre part, de la double approche didactique et ergonomique (Dade à partir des travaux de Robert, Rogalski, voir chapitre 4). Cette dernière théorie (double approche) s'est construite à la fois à partir des travaux sur les pratiques des enseignants « ordinaires[2] » et sur les pratiques de formateurs d'enseignants (du moins pour les recherches centrées sur le premier degré). Elle se réfère à la théorie de l'activité.

Les recherches portant sur l'enseignement sont trop nombreuses et les résultats trop riches pour être exposés de manière exhaustive dans cet ouvrage. Nous ne ferons que citer quelques exemples qui nous paraissent éclairer les choix que nous avons faits en termes de formation. Nous avons ciblé les recherches portant sur les pratiques enseignantes, sur la formation de ces pratiques et plus spécifiquement sur la formation des enseignants (en privilégiant la formation continue).

2.2.1 Les stratégies de formation

Les recherches sur les stratégies et situations de formation ont été initiées en France notamment par Kuzniak (1994) et Houdement (1995) qui ont élaboré une typologie des stratégies et situations de formation. Ils ont analysé les textes produits dans le cadre des stages et colloques de la Copirelem[3] (voir références, publications et sites en bibliographie). Nous retiendrons de ces travaux les résultats relatifs aux stratégies de formation et aux savoirs professionnels des enseignants.

Kuzniak et Houdement (1996) ont produit un schéma (schéma 1), permettant de modéliser le système didactique de la formation des professeurs des écoles, inspiré du système didactique classique (enseignant/savoir/élève) comportant deux niveaux. Ce schéma vise à décrire le système de formation des enseignants de l'école primaire.

2 Enseignant « ordinaire » : enseignant en exercice ne présentant pas un profil professionnel particulier (du type conseiller pédagogique, militant pédagogique, intervenant dans le cadre d'une recherche innovante, etc.).

3 Commission inter-Irem sur l'enseignement élémentaire. Cette commission, interface entre chercheurs didacticiens des mathématiques et formateurs de professeurs des écoles, a contribué à organiser la communauté des formateurs du premier degré par ses stages, son colloque annuel et ses documents.

Schéma 1 :
Système de formation des professeurs des écoles (Houdement, 2013, p. 11)[4].

Figure 1 :
Modélisation du système de formation [FM]

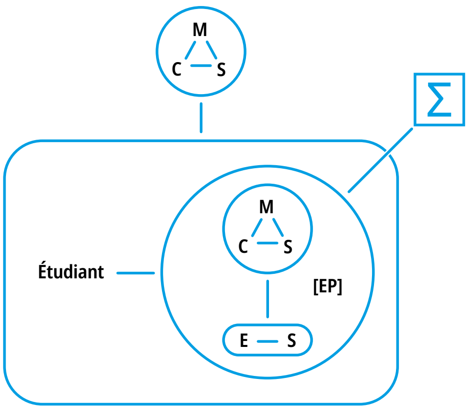
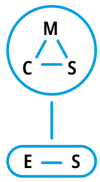


Figure 2 :
Modélisation de l'école primaire [EP]



La figure 1 représente une modélisation du système de formation, la figure 2 représente une modélisation du système de l'école primaire. Ces deux modélisations relèvent d'une même organisation, celle permettant de décrire le système didactique usuel de relations entre les éléments du système maître-élève-savoir dans le cadre d'un enseignement de type collectif (la classe). Les traits représentent alors pour chaque système des axes d'analyse de ces relations.

La modélisation de l'école primaire décrit les relations entre le système didactique maître-classe-savoir et les savoirs (mathématiques) visés par ce système devant être appris par un élève épistémique E. La modélisation comporte donc deux éléments :

- Les éléments du système didactique et les axes d'analyse des relations entre ces éléments : axe maître-classe, axe classe-savoir, axe maître-savoir. Ils sont représentés dans un cercle.
- Les savoirs mathématiques visés et la manière dont un élève épistémique E les apprend (globalement les relations entre E et S). Ils sont représentés dans un rectangle.

4 **FM :** système de formation des maîtres.
EP : école primaire.
C : classe (élèves).
M : maître, professeur.
S : savoir.
E : élève.
Σ : savoir de formation.

La description décrit donc le fait que l'élève épistémique E apprend dans le cadre collectif d'une classe C (elle-même ayant un statut épistémique).

La modélisation du système de formation FM relève de la même organisation. L'étudiant, futur enseignant, apprend des savoirs de formation dans le cadre d'une classe d'étudiants. Les deux éléments de ce niveau didactique sont :

- les éléments du système et les axes d'analyse des relations entre les éléments de ce second niveau didactique : l'axe maître (ici le formateur)-classe (d'étudiants), l'axe classe (d'étudiants)-savoirs (ici savoirs professionnels) et l'axe maître (ici le formateur)-savoir (ici savoirs professionnels). Ils sont représentés dans un cercle ;
- les savoirs professionnels que l'étudiant épistémique doit acquérir et la manière dont il les acquiert (relation étudiant-savoirs professionnels ici désignée par la lettre Σ) représentés dans un rectangle. Ces savoirs professionnels Σ sont à la fois des savoirs mathématiques mais aussi des savoirs sur l'enseignement de ces savoirs mathématiques. Ce sont des savoirs sur le système didactique de l'école primaire.

Houdement (2013) commente ainsi ce schéma : « Le formateur, par ses savoirs professionnels, doit permettre l'installation de savoirs professionnels du professeur d'école. Mais celui-ci n'est pas encore un collègue, c'est un étudiant dans un groupe classe, il est évalué par le formateur dans le système [FM]. Le savoir professionnel du professeur d'école, quand il est maître d'une classe dans le système [EP], vise l'apprentissage d'un savoir mathématique par les élèves ; mais il ne se limite pas à des mathématiques. Dans les savoirs professionnels utiles du professeur d'école figurent aussi des savoirs sur l'enseignement des mathématiques : quel que soit le mode de transmission choisi de ces savoirs, en supposant qu'ils soient explicitables, ils nécessitent la connaissance, dans sa globalité, du système [EP]. Le système est complexe dans la mesure où tout se joue sur un double niveau » (Houdement, 2013, p. 11).

En lien avec la définition de ces savoirs, Kuzniak identifie des stratégies de formateurs de professeurs des écoles. Kuzniak (1994a et b) identifie un premier type de stratégies qualifié de « stratégies culturelles ». La stratégie culturelle consiste à réorganiser et compléter les connaissances mathématiques des futurs professeurs des écoles dans le but d'assurer une maîtrise des contenus mathématiques qu'ils auront à enseigner à l'école maternelle et élémentaire sans augurer de leur mise en œuvre dans la classe. Kuzniak montre que progressivement les formateurs complètent cette stratégie par d'autres car, à elle seule, elle ne donne pas les résultats escomptés ni en matière de maîtrise des contenus ni en traduction en termes d'enseignement en direction des élèves.

Parmi les stratégies qui comportent une dimension professionnelle, Kuzniak (1994a et b) en distingue trois : les stratégies de monstration, d'homologie et de transposition.

La stratégie de monstration « privilégie la transmission d'un modèle par l'observation de sa mise en œuvre dans les classes élémentaires. Il s'agit de transmettre une pratique en la montrant aux étudiants et en la faisant imiter. C'est le mode le plus naturel et le plus ancien ("leçon modèle") d'initiation aux pratiques professionnelles » (Houdement, 2013, p. 13).

Dans une certaine mesure, des exemples de monstration seront donnés dans la suite de cet exposé sous une forme différente lors de la présentation de situations emblématiques de la construction d'une notion (hors classe).

Les stratégies basées sur l'homologie : « C'est aussi un modèle fondé sur l'imitation, mais une imitation complexe et transposée par le formé. Ce dernier doit mettre en place un modèle de formation inspiré de celui qu'il a pu vivre en tant qu'étudiant dans le centre de formation. Les formateurs enseignent conformément à leur conception de ce que doit être l'enseignement à l'école élémentaire » (Houdement, 2013, p. 13).

On trouvera dans l'ouvrage collectif *Concertum* publié par la Copirelem (2003) de nombreux exemples de situations de formation illustrant cette stratégie. Ces situations sont proposées aux futurs professeurs des écoles. Elles mettent en jeu des savoirs de l'école élémentaire ou des savoirs très proches (et plus généralement proches du niveau dans lequel l'enseignant exerce). Elles sont toutefois plus complexes de manière à engager les futurs professeurs dans une recherche et un questionnement sur les savoirs en jeu. Elles peuvent se transférer facilement à l'école tant en termes de gestion qu'en termes de contenus. Elles visent à changer les représentations des étudiants en formation sur les mathématiques et leur enseignement, privilégiant notamment une vision problématique de cette discipline, et elles renvoient le plus souvent à une conception constructiviste de l'apprentissage. Kuzniak (1994a) souligne les avantages à priori de cette stratégie, mais en précise aussi les limites. Ces dernières concernent essentiellement les effets sur les pratiques effectives : « Les stratégies basées sur l'homologie supposent implicitement que le transfert opéré par l'étudiant n'est pas problématique. En règle générale, on peut dire que la réflexion sur le phénomène de transposition du savoir qui s'opérera ensuite de la part des étudiants est absente. » Mais, bien sûr, l'effet de ce type de stratégie dépend aussi du niveau de maîtrise des contenus mathématiques des étudiants.

Des exemples de situations d'homologie seront présentés dans les chapitres qui suivent.

Les stratégies de transposition : « Elles s'opposent aux précédentes par l'insistance mise sur la distanciation théorique. Elles se proposent de transmettre des savoirs de référence mais portant sur la pratique de la classe ; ce qui les distingue des stratégies culturelles. Pour étudier ces stratégies, il sera important de préciser les savoirs retenus et les modes de transposition mis au point » (Houdement et Kuzniak, 1996, pp. 301-302).

Certaines situations de ce type se caractérisent par la volonté de transmettre des savoirs directement issus des recherches en didactique des mathématiques qui s'inscrivent dans une construction théorique. Le but est alors de fournir aux étudiants ou aux professeurs des outils, voire une grille de lecture, leur permettant à la fois de s'approprier les ressources mises à leur disposition (y compris certaines ingénieries didactiques élaborées lors de recherche), mais aussi d'analyser leurs pratiques de professeurs novices ou débutants. Cette transposition n'est pas sans soulever des questions, notamment sur la pertinence des outils en question. En effet, les concepts de didactique présentés (variables des situations ; éléments de théories des situations didactiques dont, notamment, contrat didactique, situation a-didactique, situation didactique ; cadres, jeux de cadres, dialectique outil-objet, etc.) n'ont pas été élaborés dans un but d'enseignement mais dans un but de recherche. Leur appropriation (sans déformation trop importante) est délicate pour les étudiants. Le risque de caricature est important.

En outre, Butlen et Masselot (1997), puis Butlen, Lepoche et Masselot (1998, 2001), ont porté un nouveau regard sur les stratégies, les situations et savoirs de formation en introduisant les stratégies de compagnonnage et de réflexivité.

Compagnonnage et réflexivité : Butlen et Masselot (1997) ont en effet approfondi les notions de stratégies, de situations et de savoirs de formation. Ils entendent par « savoirs de formation, des savoirs transmis en formation qui ne sont ni directement des savoirs mathématiques (disciplinaires) mais qui sont marqués par les mathématiques, ni des savoirs psychologiques mais qui sont marqués par la psychologie, etc. […] Ces stratégies sont qualifiées de stratégies de compagnonnage et de réflexivité » (Butlen, Lepoche, Masselot, 1998, 2001). Les stratégies de compagnonnage et de réflexivité permettent de prendre en compte les interactions entre enseignants experts et novices lors des stages sur le terrain (en formation initiale) ou entre pairs et formateurs lors de situations d'analyses de pratiques effectives (par exemple en formation continue).

Nous renvoyons le lecteur aux différentes contributions que ces auteurs ont rédigées dans le cadre notamment des documents édités par la Copirelem.

2.2.2 Savoirs professionnels, savoir de formation

Des recherches francophones et anglo-saxonnes se sont déroulées parallèlement à partir de la fin du siècle dernier et ont débouché sur des résultats très proches sur les savoirs professionnels des enseignants, plus particulièrement de mathématiques. Les recherches françaises ont pour amorce l'étude de la formation des enseignants[5], alors que les recherches anglo-saxonnes s'appuient sur l'analyse des pratiques et des savoirs des enseignants.

5 Les études ciblant les pratiques enseignantes sont postérieures aux premières études sur les pratiques de formation comme en témoigne la thèse de Monique Pézard (1985) sur la formation initiale des instituteurs dans le domaine de la proportionnalité.

Les thèses de Kuzniak et Houdement ont permis de poser la question des savoirs de formation et de leur nature mais aussi des savoirs professionnels des enseignants. Ils distinguent trois types de savoirs : le savoir mathématique, le savoir didactique et le savoir pédagogique. Rappelons les définitions proposées par Houdement dans son HDR (Houdement, 2013, pp. 12-13).

Le savoir mathématique correspond aux mathématiques nécessaires à l'enseignant pour préparer, réguler et évaluer sa séance et ses élèves[6]. Ce savoir renvoie entre autres à deux dimensions importantes : le processus de transposition (voir chapitre 2) et la gestion de la tension entre point de vue épistémologique et point de vue cognitif.

Le savoir didactique est, par définition, nourri par les recherches en didactique sur les mathématiques du primaire. À priori, ce savoir a vocation à être théorique, mais, d'une part, tout n'est pas théorisé en didactique (et peu de choses l'étaient à l'époque de nos recherches), d'autre part, une transposition est nécessaire pour le rendre accessible en mots. Ce savoir didactique est issu d'ouvrages de recherches collaboratives autour des Irem ou de l'INRP ou de lectures plus théoriques (revue *Recherches en didactique des mathématiques*[7]). Notons que ce type de savoir comporte au moins les deux dimensions « *Knowledge of Content and Student* » et « *Knowledge of Content and Teaching* » identifiées par les recherches anglo-saxonnes (voir ci-dessous, p. 29).

« L'étude des stratégies de formation fit émerger un troisième savoir dont les formateurs visaient la transmission : **le savoir pédagogique ou "savoir d'expérience"** (Portugais, 1995). Le "troisième savoir" se caractérise par son oscillation entre deux pôles, l'un théorique mais parfois très éloigné de la pratique future des étudiants (par exemple le fait que les conceptions constructivistes de l'apprentissage prennent le pas sur les conceptions behavioristes), l'autre proche du sens commun et de la pratique (dans notre étude la pratique de classe), mais privé de l'adaptabilité d'un modèle plus théorique. Le corpus de référence est constitué par un ensemble particulièrement hétérogène de traités empruntant à diverses disciplines, de livres du maître et de fichiers d'élèves » (Houdement, note de synthèse HDR, p. 14).

Ce troisième type de savoir a été exploré par Butlen et Masselot (2001) et Butlen, Masselot et Pézard (2004) qui ont développé les notions de « gestes » et de « routines professionnelles ». Ces résultats de recherches françaises rejoignent certains résultats d'autres recherches, notamment anglo-saxonnes, sur les connaissances des enseignants.

6 Houdement, note de synthèse HDR, p. 12.

7 *Idem.*

Les recherches anglo-saxonnes sur les connaissances professionnelles des enseignants

Cette présentation[8] ne dresse pas une liste exhaustive des recherches anglo-saxonnes mais expose des lignes directrices. Ces recherches ne distinguent pas le professeur des écoles enseignant les mathématiques (premier degré) et le professeur enseignant uniquement les mathématiques (second degré). Plusieurs recherches distinguent deux types de connaissances professionnelles des enseignants : les connaissances « objectives » et les connaissances « subjectives » ou « *beliefs* ».

Les connaissances « objectives » : un accord se fait entre chercheurs anglo-saxons (ICMI, 2009), sur la base des travaux de Shulman (1987), sur l'existence de trois types de connaissances, à savoir les connaissances mathématiques (*Content Knowledge*), les connaissances pédagogiques (*Pedagogical Knowledge*) et les connaissances didactiques (*Didactical Knowledge*). Toutefois, Shulman n'utilise pas ces termes. Il distingue le « *Subject Matter Knowledge* » (SMK) ou « *Content Knowledge* », le « *Pedagogical Knowledge* » (PK) et le « *Pedagogical Content Knowledge* » (PCK).

Le SMK (« *Subject Matter Knowledge* ») concerne les connaissances mathématiques (concepts, techniques, méthodes, modes de raisonnement).

Le PK (« *Pedagogical Knowledge* ») comporte les connaissances générales sur l'éducation, ses aspects psychologiques, éthiques, sociologiques mais aussi la gestion de la classe.

Le PCK (« *Pedagogical Content Knowledge* » concerne les formes de représentations des concepts, les analogies, illustrations, exemples, explications et démonstrations, etc. Proche du SMK, il s'en distingue par la nécessité de représenter les notions mathématiques pour les rendre compréhensibles aux autres.

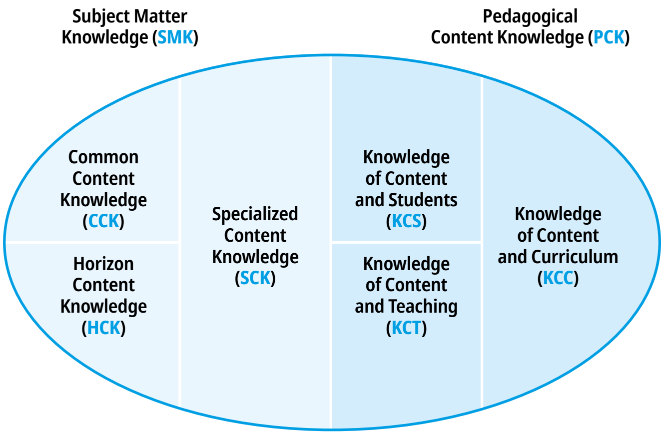
Le « *Didactical Knowledge* » concerne les conditions et les manières d'apprendre les mathématiques et d'enseigner les mathématiques. Il renvoie donc à des connaissances didactiques.

Autrement dit, le professeur mobilise dans l'exercice de son métier trois catégories de connaissance : des connaissances mathématiques (SMK), des connaissances pour enseigner (PK) et des connaissances pour enseigner les mathématiques (PCK) qui recoupent pour une large part, sans s'y identifier, le « *Didactical Knowledge* » (DK).

Ball, Thames et Phelps (2008) affinent les catégories définies par Shulman en distinguant respectivement dans les SMK et PCK des composantes comme le montre le schéma ci-dessous.

8 Cette présentation reprend pour une large part une synthèse faite par Monique Charles-Pézard (2010), publiée dans le cahier n° 1 du LDAR (*Cahiers de didactique*).

Schéma 2 :
Domains of Mathematical Knowledge for Teaching
[Connaissances mathématiques pour l'enseignement] (Ball *et al.*, 2008, p. 403).



La catégorie dénommée « connaissances mathématiques pour l'enseignement » ou « *Domains of Mathematical Knowledge for Teaching* » se subdivise en deux composantes : « *Subject Matter Knowledge* (SMK) » et « *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) ». Ces deux composantes sont elles-mêmes divisées chacune en trois catégories. Les connaissances relevant du SMK se décomposent en trois : les connaissances indépendantes de l'enseignement (*Common Content Knowledge* [CCK]), les connaissances mathématiques spécifiques du travail du professeur (*Specialized Content Knowledge* [SCK]) et les connaissances de l'horizon mathématique (*Horizon Content Knowledge* [HCK]).

Les **connaissances mathématiques communes (CMC)** ou ***Common Content Knowledge* (CCK)** se composent de techniques et méthodes mathématiques intervenant dans diverses disciplines faisant appel aux savoirs mathématiques. Elles permettent entre autres des applications, des modélisations et l'étude de situations dans un contexte d'analyse de tâches.

Les **connaissances de l'horizon mathématique (CHM)** ou ***Horizon Content Knowledge* (HCK)** favorisent l'articulation et le lien entre les contenus mathématiques mais décrivent aussi l'organisation des différentes notions à enseigner pour un même niveau et selon plusieurs niveaux. Ce type de connaissances permet de cerner les fondements et bases des contenus, apportant une vision plus large des mathématiques (une perspective écologique au sens de Chevallard [2002]).

Les **connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement (CMS)** ou ***Specialized Content Knowledge* (SCK)** permettent l'enseignement et l'apprentissage des contenus.

Tableau 1 :
Tableau décrivant les subdivisions du SMK (Charles-Pézard, 2010, p. 18)

SMK (*Subject Matter Knowledge*)		
Les mathématiques en tant que discipline : les concepts, les techniques, les méthodes, les formes de raisonnement…		
CCK : « *Common Content Knowledge* »	**SCK : « *Specialized Content Knowledge* »**	**HCK : « *Horizon Content Knowledge* »**
Connaissances mathématiques indépendantes de l'enseignement.	Connaissances mathématiques **spécifiques** du travail du professeur	L'organisation des différentes notions à enseigner pour un même niveau mais aussi selon les différents niveaux scolaires.

Ball, Thames et Phelps (2008) décompose le ***Pedagogical Content Knowledge*** **(PCK)** également en trois types de connaissances.

La première composante dénommée ***Knowledge of Content and Teaching*** **(KCT)** ou « **connaissances du contenu de l'enseignement du sujet ou de la matière (CC)** » est composée des connaissances mathématiques auxquelles l'enseignant se réfère pour planifier les situations d'enseignement-apprentissage. Celles-ci favorisent le choix des activités de préparation, de réalisation, d'objectivation et de réinvestissement. Autrement dit, elles interviennent dans les situations d'actions et participent au processus de dévolution et d'institutionnalisation (Brousseau, 1998a). Elles recouvrent donc la préparation et la gestion de la classe.

La deuxième composante, ***Knowledge of Content and Students*** **(KCS)** ou **connaissances de l'élève et de l'apprentissage du sujet ou de la matière (CE)**, concerne la compréhension et les divers processus d'acquisition des concepts mathématiques. Elle permet de cerner les spécificités de l'élève au regard des concepts, de la nature des erreurs et des procédures mathématiques. Elle aide à comprendre les démarches, l'usage de contenus mathématiques et les régularités en matière de concepts. Servant de références pour diverses analyses (conceptuelles, à priori et à posteriori), elles sont utiles pour anticiper les procédures, les erreurs et mettre en évidence les fausses conceptions des élèves (par exemple ce que Vergnaud [1991a] appelle des « théorèmes en actes », voir chapitre 2).

Enfin, la dernière composante, ***Knowledge of Content and Curriculum*** **(KCC)** ou **connaissances du programme et des moyens d'enseignement (CP)**, se compose des connaissances liées aux contenus déterminés dans les programmes d'études.

Tableau 2 :
Tableau décrivant les subdivisions du PCK (Charles-Pézard, 2010, p. 18)

PCK (*Pedagogical Content Knowledge*)		
Les formes de représentation des concepts, les analogies, illustrations, exemples, explications et démonstrations, « en d'autres mots, les manières les plus utiles de représenter et de formuler le contenu pour le rendre compréhensible aux autres ».		
KCT : « *Knowledge of Content and Teaching* »	**KCS : « *Knowledge of Content and Students* »**	**KCC : « *Knowledge of Content and Curriculum* »**
Le contenu et la gestion des différents moments d'une séance en classe : choix et dévolution du problème, choix des procédures à expliciter, hiérarchisation de ces dernières, institutionnalisation, choix des exercices de réinvestissement…	Connaissances sur les conceptions des élèves en mathématiques, sur leurs difficultés, sur les erreurs qu'ils produisent.	Connaissance des programmes, instructions officielles…

Les connaissances « subjectives » ou « *beliefs* » : les recherches anglo-saxonnes accordent un rôle important (notamment pour le premier degré) aux « *beliefs* » qui renvoient à des connaissances plutôt subjectives des enseignants, notamment aux connaissances sur la discipline et son enseignement acquises avant d'enseigner, comme élève ou étudiant. Ces « *beliefs* » sont davantage des croyances ou des représentations très souvent perçues comme faisant obstacle à la construction des connaissances nécessaires à un enseignement de qualité. Ces recherches sur les « *beliefs* » enrichissent les connaissances sur les dispositifs et savoirs de formation. Une partie de ces « *beliefs* » peut être modifiée grâce à une attitude réflexive du professeur sur sa propre pratique mathématique.

2.2.3 Un appui fort sur les pratiques en formation

Beaucoup de chercheurs s'accordent pour intégrer la pratique aux différents cours en formation initiale, comme les Canadiens Bednarz et Proulx (2005) qui développent le principe d'« apprendre dans l'action plutôt qu'apprendre sur l'action ».

Goos (2005) propose une extension au champ de la formation de la notion de « zone proximale de développement (ZPD) » en définissant notamment la « *Zone of Free Movement* (ZFM) » qui représente les contraintes de l'environnement, et donc limite les marges de manœuvre du futur enseignant, et la « *Zone of Promoted Action* (ZPA) » qui représente les actions promues par les experts, les formateurs, les tuteurs, etc. Cela conduit au schéma qui modélise un lieu de développement professionnel maximum, intersection entre la ZPD et la ZPA, toutes deux incluses dans la ZFM. Évidemment, il peut y avoir plusieurs ZPA, comme celle de l'université ou celle du tuteur (professeur expérimenté issu du terrain). Cette idée est reprise par Goigoux (2007) et Robert (2001a et b) notamment sous le qualificatif de ZPDP, « zone proximale de développement professionnel ».

Rowland, Thwaites et Huckstep (2005) s'appuyant sur les travaux de Shulman proposent un cadre théorique appelé « *the knowledge quartet* » pour l'observation et l'analyse de séances de classe regroupant le professeur novice, le formateur et le tuteur, et visant à comprendre comment interviennent les différentes formes de connaissances décrites ci-dessus. Ce cadre est proche des ateliers d'analyse de pratiques professionnelles que proposent en France Butlen et Masselot, qui s'inscrivent dans la continuité des situations d'analyse de pratiques développées par Altet et Britten (1983).

De nombreuses recherches portent sur les relations entre formation initiale et pratiques quotidiennes des enseignants. Les premières années d'exercice sont alors vues comme des années de transition et cela selon différents points de vue : épistémologique (passage des connaissances académiques aux connaissances à enseigner), institutionnel ou encore personnel (passage d'une posture d'étudiant à une posture de professionnel).

Le passage des connaissances académiques aux connaissances à enseigner est travaillé à partir de différents modèles. Citons le modèle japonais (*the lesson study*). Ce dernier, développé par Shimizu (2002a et b), Yoshida (2005), Fernandez et Yoshida (2004) au Japon, a également influencé des recherches américaines. Ces leçons concernent tous les niveaux de l'école et constituent un moyen de formation. Il s'agit de cibler une leçon spécifique et de l'améliorer.

En France, Masselot (2000) a plus particulièrement travaillé sur les effets de la formation initiale des professeurs des écoles. Les résultats montrent un impact très nuancé de la formation sur les pratiques effectives au quotidien. Si la formation dispensée peut avoir des effets sur la composante cognitive, c'est davantage contrasté pour la composante médiative. Une des conclusions est que, pour pouvoir intervenir sur les pratiques, il est indispensable de prendre en compte et d'avoir accès à la logique des pratiques effectives de chaque enseignant. Mangiante (2007) montre que les pratiques des professeurs des écoles en germe en formation initiale se stabilisent, se confirment, mais aussi s'enrichissent et se développent lors des premières années d'exercice. Elle montre que les sources de ce développement sont de plusieurs types : les **ressources** dont le professeur dispose (en formation et en exercice), **l'activité des élèves** ou **celle du professeur**. Selon les cas, l'une de ces sources est plus importante que les autres.

3 DES PRINCIPES DE FORMATION

Nombre de didacticiens attirent l'attention sur la nécessaire prise en compte du décalage existant entre d'une part l'étude de concepts construits dans le cadre de la recherche en vue de contribuer à une élaboration qui construit les bases ou s'intègre dans des théories didactiques (organisations de savoirs reconnus par les communautés scientifiques de recherche) et, d'autre part, leur utilisation et leur application en vue de penser des dispositifs d'enseignement à destination des professeurs, voire en vue de définir des normes pour les pratiques enseignantes.

Nous partageons cette prudence en développant l'idée d'une didactique outil.

3.1 Une didactique outil

Les concepts et éléments de théorie que nous présentons dans les chapitres qui suivent n'ont pas pour but d'être une formation au métier de chercheur mais constituent des outils pour aider les enseignants dans l'exercice quotidien de leur métier et les formateurs dans la construction de modules de formation. Il ne s'agit pas de présenter des édifices théoriques éclairant les questions d'enseignement, mais de donner des éléments issus de ces constructions théoriques permettant d'accroître les marges de manœuvre des professeurs et d'optimiser la transposition didactique. Ces concepts ont été repensés en termes de formation et d'enseignement. Leur élaboration est au départ le produit d'une **double transposition** (Robert, 2001a et b ; Butlen, 2004). Tout d'abord, dans le cadre de structures permettant de faire se rencontrer chercheurs en didactique, formateurs d'enseignants et enseignants (existantes sous des formes un peu différentes notamment en France et au Canada), certains concepts de recherche élaborés par et pour la recherche ont subi une première transformation (transposition) pour devenir des outils de formation. Ils sont alors devenus des savoirs potentiels de formation. Dans un second temps, une seconde transposition a été effectuée essentiellement par les formateurs d'enseignants (fonctionnant dans des structures de formation diverses). Ces savoirs potentiels de formation ont été repensés en termes d'enseignement et d'outils susceptibles d'accroître le processus de transposition didactique (transposition interne pour une grande part). Parfois, ces deux temps peuvent s'être déroulés parallèlement, voire dans un processus d'étroite production.

Nous inscrivons notre démarche dans la perspective de favoriser l'exercice par les enseignants d'une **vigilance didactique** favorisant les apprentissages des élèves.

3.2 Vigilance didactique et formation des enseignants

Parmi les derniers développements dans le domaine de l'analyse des pratiques professionnelles des enseignants, nous citons le concept de « **vigilance didactique** » développé notamment par Charles-Pézard (2010), Charles-Pézard, Butlen et Masselot (2012), Butlen et Masselot (2018), et repris et approfondi par Mangiante et Winder (2023, à paraître). Il s'agit de l'un des principaux résultats d'une décennie de recherches consacrées à l'analyse de pratiques professionnelles de professeurs des écoles enseignant dans des classes regroupant massivement des élèves issus de milieux socialement défavorisés. Ce concept identifie une question professionnelle majeure partagée par l'ensemble des enseignants du premier degré, dont la réponse détermine pour une part importante les pratiques.

Charles-Pézard (2010) définit la vigilance didactique comme « une sorte d'ajustement didactique permanent de la part du professeur faisant appel aux composantes cognitive et médiative des pratiques et s'exerçant dans les trois niveaux global, local et micro ». Elle précise cette définition en se référant aux savoirs mathématiques mobilisés. L'exercice de cette vigilance didactique met en jeu des connaissances mathématiques et didactiques nécessaires pour enseigner. Les connaissances mathématiques ne sont pas seulement académiques, elles doivent être finalisées pour l'enseignement.

Elle souligne d'autre part la dialectique existante entre connaissances mathématiques et connaissances didactiques. Les **connaissances didactiques** contribuent à une **bonne perception des enjeux** d'apprentissage des situations et à leur organisation. Elles peuvent être de plusieurs types :

- des **résultats** ou **faits didactiques**, mis en évidence par la recherche et qui ne sont plus contestés ;
- des sortes de « **petits théorèmes de didactique** » par exemple les incidences de conceptions erronées des nombres décimaux sur la mise en ordre de tels nombres ;
- des **outils** permettant de **lire le réel**, issus de la didactique des mathématiques mais transformés en vue de l'action d'enseigner (analyse à priori, identification du savoir et de son ou ses textes, repérage et analyse en actes des productions des élèves, gestion des variables, etc.).

L'exercice de la vigilance didactique est donc un outil permettant au chercheur d'analyser les pratiques enseignantes en essayant de caractériser comment elles prennent en compte les mathématiques enseignées et leur organisation, mais aussi les cheminements cognitifs possibles des élèves.

3.3 D'autres principes

D'autres principes fondent notre manière de penser les ateliers de formation. Citons notamment la volonté :

– **d'entrer en résonance** avec les conceptions et représentations des formateurs afin de les enrichir notamment en les diversifiant. En effet, les thèses de Masselot (2000) et Vergnes-Arotça (2000) montrent que c'est une condition indispensable pour permettre aux enseignants, débutants comme confirmés, de questionner les logiques et situations de formation, de se les approprier ou de les mettre en œuvre ;

– de développer une **approche holistique de formation** (dans la mesure où les thèmes privilégiés par l'atelier et les conditions d'exercice le permettent) **intégrant** des **apports d'informations**, le **vécu de situations de formation** (notamment de type homologie ou de type transposition), la **coconstruction** de documents à destination des formateurs et des enseignants, une **approche réflexive** sur des exemples de pratiques et les gestes nécessaires à la gestion de la classe (par exemple à partir de séances de classes filmées) ;

– **d'expérimenter** quand cela est possible des moments de formation, de les exposer et de les analyser lors d'un retour en atelier ;

– **d'enrichir les pratiques** de formateurs et des enseignants en **diversifiant les sources** de développement professionnel de chacun (Mangiante, 2007) ;

– de prévoir des moments de travail sur **différents temps d'analyse de la gestion des enseignements** : micro (le temps de la séance), méso (le temps d'une séquence ou du travail sur une progression sur un thème), macro (le temps de la programmation, du curriculum, voire du cycle) ;

– de prendre en compte les **spécificités et les conditions** du système éducatif propres à chaque pays.

Dans cette perspective, nous nous plaçons dans la logique d'élaborer, d'expérimenter effectivement en formation des situations, et plus généralement un scénario d'atelier (à contextualiser en fonction des demandes spécifiques des pays et des PTA).

4 UN CANEVAS DE FORMATION À CONTEXTUALISER EN FONCTION DES BESOINS ET SPÉCIFICITÉS DES PAYS

Nos scenarii de formation sont construits avec le souci de produire des livrables prenant en compte à la fois les spécificités du pays et les principes exposés ci-dessus. Chaque scénario se doit de déboucher sur une production coconstruite avec les participants. Un scénario possible serait de penser des situations lors d'une préparation de l'atelier, en lien étroit avec l'expert associé, pour définir les contenus et les stratégies, et ce à partir des TDR qui précisent la fonction des objectifs et contenus spécifiques aux ateliers. Par thème et catégorie d'outils, le scénario comporte souvent les étapes suivantes :

1. La présentation du concept illustré par un ou plusieurs exemples initialisés par un exposé ou par la lecture de documents.
2. La mise en œuvre par les participants d'analyses d'exemples contextualisés dans le pays concerné par les outils présentés (souvent par groupes).
3. Les exposés et échanges autour de ces productions demandant souvent un retour sur les outils didactiques mobilisés et un complément d'informations.
4. La production finalisée en vue du rapport et des livrables demandés.

Le chapitre 2 et les suivants développent cette approche par thème et présentent des exemples de productions locales. Dans certains cas, et dans un but de généralisation et de décontextualisation de ces exemples, nous proposons pour un même thème des alternatives possibles qui dépendent du contexte et des conditions locales d'enseignement (notamment des programmes et des effectifs de la classe) et du matériel disponible.

Dans la mesure du possible, en fonction des programmations d'ateliers prévues, nous sommes attachés à un dispositif global en trois étapes minimum, justifié par une dialectique entre formation-expérimentation sur le terrain, retours sur expériences et compléments de formation.

1. Un premier atelier de cinq jours ayant pour but de mettre en œuvre un scénario reprenant plusieurs (ou tous les) thèmes à aborder, et aboutissant quand cela est possible à l'élaboration d'un dispositif de formation ou, à minima, à des situations à expérimenter sur le terrain.

2. Une expérimentation sur le terrain avec une prise d'informations et de données suffisante pour préparer un retour sur expérience à l'étape suivante (préparée en amont lors du premier atelier par la donnée de grilles d'observation ou au moins d'indicateurs à renseigner). Un recueil vidéo est souhaitable quand cela s'avère possible.
3. Un second atelier permettant de revenir sur les concepts étudiés mais aussi sur les situations et dispositifs de formation possibles débouchant sur des livrables pouvant être diffusés localement ou plus largement.

5 BIBLIOGRAPHIE

Altet, M. et **Britten, J. D.** (1983). *Le micro-enseignement : Une méthode rationnelle de formation des enseignants.* Dunod.

Ball, D. L., **Thames, M. H.** et **Phelps, G.** (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special. *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Bednarz, N. et **Proulx, J.** (2005). Practices in mathematics teacher education programs and classroom practices of future teachers: from the educator's perspectives and rationales to the interpretation of them by the future teachers. *The 15th ICMI study – the professional education and development of teachers of mathematics*, Sao Paolo, BR, ICMI. Available on CD-ROM.

Butlen, D. (2004). *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire : Des difficultés des élèves de milieux populaires aux stratégies de formation des Professeurs des Écoles.* Note de synthèses HDR Paris, Université Paris 8.

— et **Lepoche, G.** (1998). Analyse d'entretiens à chaud lors d'ateliers professionnels. Dans Copirelem, *Actes du colloque national des formateurs de mathématiques du premier degré (Loctudy)* (pp. 249-280), IREM de Brest.

— et **Masselot P.** (1997). Ateliers d'analyse de pratiques professionnelles en formation initiale des professeurs des écoles. Dans Copirelem, *Documents pour la formation des professeurs des écoles en didactique des mathématiques, Tome V* (pp. 95-107), *Actes du stage national des formateurs de mathématiques du premier degré*, IREM de Paris 7.

— et **Masselot, P.** (2001). Exemples de routines au CP : pratiques en mathématiques d'un professeur des écoles en première nomination. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot et R. Floris (dir.), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 226-230), La Pensée sauvage.

— et **Masselot, P.** (2018). De la recherche à la formation : enrichir les pratiques des enseignants pour favoriser les apprentissages des élèves en mathématiques. *Recherche et formation*, 87, 61-75.

—, **Lepoche, G.**, **Masselot, P.** (2001). Analyse d'une séance de mathématiques menée par un professeur stagiaire : introduction d'écritures soustractives au CP. Dans Copirelem, *Actes du colloque national des formateurs de mathématiques du premier degré* (pp. 177-213), IREM Paris 7.

—, **Masselot, P.** et **Pézard, M.** (2004). Dans M. L. Peltier (dir.), *Dur, dur, dur d'enseigner en ZEP*, La Pensée sauvage.

Charles-Pézard, M. (2010). Exemples de recherches en didactique des mathématiques sur la formation des enseignants (premier et second degrés). Dans M. Haspekian et J. Horoks (dir.), *Cahier n° 1 du LDAR, « Exemples de recherches sur la formation des enseignants »* (pp. 17-31), IREM de Paris 7.

—, **Butlen, D.** et **Masselot, P.** (2012). *Professeurs des écoles débutants en ZEP. Quelles pratiques ? Quelle formation ?.* La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques : L'approche anthropologique. Dans R. Noirfalise (dir.), *Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques : Actes de l'Université d'été de didactique de La Rochelle* (pp. 119-140), IREM de Clermont-Ferrand.

— (2002). Organiser l'étude. 3. Écologie & régulation. Dans *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 41–56). La Pensée sauvage.

Fernandez, C. et **Yoshida, M.** (2004). *Lesson Studies: a Japanese Approach to Improving Mathematics Teaching and Learning.* Lawrence Arlbaum Associates.

Goigoux, R. (2007). Un modèle d'analyse de l'activité des enseignants. *Éducation et didactique*, *1-3*, 47-69.

Goos, M. (2005). Une analyse socioculturelle du développement des identités pédagogiques des enseignants débutants et pré-formation en tant qu'utilisateurs de la technologie. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(1), 35-59. doi:10.1007/s10857-005-0457-0.

Houdement, C. (1995). *Projet de formation des maîtres du premier degré en mathématiques : Programmation et stratégies* [thèse de doctorat]. IREM de Paris 7, Université Paris 7 Diderot.

— et **Kuzniak, A.** (1996). Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *16*(3), 289-322.

— (2013). *Au milieu du gué : entre formation des enseignants et recherche en didactique des mathématiques* [note d'habilitation à diriger des recherches]. Université Paris Diderot – Université de Rouen, IREM de Paris.

Kuzniak, A. (1994a). *Étude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les maîtres du premier degré* [thèse de doctorat]. Université Paris 7, IREM de Paris 7.

— (1994b). Les stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. Dans Copirelem, *Actes du XXIe Colloque de la COPIRELEM – Chantilly*, IREM de Paris.

Mangiante-Orsola, C. (2007). *Une étude de la genèse des pratiques de professeurs des écoles enseignant les mathématiques : prédétermination et développement* [thèse de doctorat]. IREM de Paris, Université Paris-Diderot.

Masselot, P. (2000). *De la formation initiale en didactique des mathématiques (en centre IUFM) aux pratiques quotidiennes en mathématiques, en classe, des professeurs d'école (une étude de cas)* [thèse de doctorat], IREM de Paris 7, Université Paris 7.

Robert, A. (2001a). Recherches sur les pratiques des enseignants de mathématiques du secondaire : imbrication du point de vue de l'apprentissage des élèves et du point de vue de l'exercice du métier d'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques*, *21*(1/2), 7-56.

— (2001b). Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques*, *21*(1/2), 57-80.

Rowland, T., **Thwaites, A.** et **Huckstep, P.** (2005). The Knowledge Quartet: a Framework for Reflection, Discussion and Professional Development. *Conference of the 15th ICMI study on the Professional Education of Teachers of Mathematics*, Aguas de Lindoia, Brazil.

Shimizu, Y. (2002a, 27-31 mai). Capturing the structure of Japanese mathematics lessons: some findiZngs of the international comparative studies. *ICMI-Second East Asia Regional Conference on Mathematics Education and Ninth Southeast Asian Conference on Mathematics Education*, Singapore.

— (2002b). Sharing a new approach to teaching mathematics with the teachers from outside the school: the role of lesson study at "Fuzoku" schools. *The US-Japan Cross Cultural Seminar on the Professionalization of Teachers through Lesson Study*, Park City, Utah.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-22.

Vergnaud, G. (1991a). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, *10*(2/3), 133-170.

Vergnes-Arotça, D. (2000). *Analyse des effets d'un stage de formation continue en géométrie sur les pratiques d'enseignants de l'école primaire* [thèse de doctorat]. IREM de Paris 7, Université Paris 5.

Yoshida, Y. M. (2005). Using Lesson Study to Develop Effective Blackboard Practices. Dans P. Wang-Iverson et M. Yoshida (dir.), *Buiding Our Understanding of Lesson Study* (pp. 93-100). Research for Better Schools.

CHAPITRE

2

ANALYSE DIDACTIQUE D’UN CONCEPT

1 INTRODUCTION

Nous présentons ici les choix que nous avons opérés pour l'analyse didactique d'un concept. Dans un premier temps, une synthèse sur des notions qui structurent notre démarche, en apportant quelques éclairages sur des théories qui les sous-tendent et qui permettent de mieux comprendre le processus de conceptualisation en mathématique. Dans un second temps, des outils pour l'enseignant et le formateur, ainsi que des exemples de leur mise en œuvre (analyse conceptuelle, carte et cartographie conceptuelles).

2 CADRE THÉORIQUE : DES ÉLÉMENTS DE DIFFÉRENTES THÉORIES DIDACTIQUES AU SERVICE DE LA PRATIQUE ET DE L'ANALYSE D'UN CONCEPT

Comme dans tout système éducatif, les programmes positionnent des concepts mathématiques qui constituent des enjeux qu'il s'avère important de décliner en processus et contenus mathématiques.

Pour analyser ces programmes, des choix ont été faits, lors des formations, visant le renforcement des capacités en didactique des mathématiques des formateurs de formateurs dans le cadre du projet APPRENDRE de l'AUF. Le recours à des assises théoriques diversifiées en didactique des mathématiques et la mise en place d'outils permettent à l'enseignant d'avoir un regard global (macro et micro) sur les concepts. Celui-ci peut alors se rendre compte de l'importance de la maîtrise du contenu, de l'influence de ces concepts, de leur lien avec d'autres. Il peut ainsi, avec des outils didactiques pertinents, et surtout des situations didactiques signifiantes et porteuses, jouer son rôle d'enseignant et assumer ses responsabilités pour faire apprendre les mathématiques aux élèves.

Dans un premier temps, nous rappellerons certaines définitions relatives aux connaissances et aux savoirs. Ces deux termes sont souvent employés indifféremment, toutefois, ils font chacun référence à des statuts différents de la connaissance.

2.1 Connaissance et savoir

2.1.1 Connaissance

Dans le glossaire élaboré par la Copirelem[1], le terme « connaissance » concerne le sujet (personnel, cognitif). Nous appelons « connaissance engagée dans une situation » ce qui permet à un sujet qui doit, dans cette situation, envisager une série de choix possibles, prendre une décision, de manière reproductible (*i.e.* la même décision pour une situation analysée comme étant de même type).

Une connaissance est donc attestée par des actions réalisées par le sujet, accompagnées ou non de formulations langagières (orale, graphique ou écrite), explicitant les choix envisagés et la décision (qui sera) prise, ou le débat sur le système de détermination des choix et de décision. Des décisions issues de connaissances manifestent une certaine régularité.

Certaines décisions régulières ne correspondent pas à des choix, mais à l'absence de considération par le sujet de choix à réaliser : il n'envisage qu'une décision possible.

2.1.2 Savoir

Dans le même glossaire [2], le savoir est défini comme relatif à un sujet institutionnel, voire à un objet de l'institution. Un savoir est un ensemble de connaissances reconnues **culturellement dans une institution**. C'est le savoir qui permet le repérage des connaissances des sujets utiles à la vie de l'institution. Un savoir se formule dans une langue et dans une culture. Les savoirs mathématiques de référence sont ceux produits et consignés par les mathématiciens dans les ouvrages et articles de mathématiques.

Les auteurs du glossaire élaboré par la Copirelem [2] distinguent « savoir » et « connaissance » ainsi : le savoir n'est pas la connaissance et la connaissance n'est pas le savoir.

Les connaissances, instruments personnalisés d'action sur le monde, ne sont pas naturellement transformées en savoirs. Un enfant qui a réussi une tâche ne reconnaît pas encore la valeur culturelle de ce qu'il a fait. Les mathématiciens n'ont pas toujours (ou pas encore à une date donnée) institutionnalisé en savoirs toutes les connaissances communes nécessaires à leur pratique (par exemple les énumérations, fractales, etc.).

Les savoirs renvoient à un objet culturel. La création et la manière d'acquérir ce dernier sont sociales, à l'intérieur d'une institution, par l'utilisation d'une langue et d'une culture explicitées, établies, reconnues. Les savoirs ne sont pas naturellement transformés en connaissances par un sujet dans une situation. Il faut que celui-ci soit capable d'établir

1 Les numéros entre crochets renvoient aux différents glossaires. Voir note 2 de l'introduction générale.

un rapport de sujet connaissant à la situation. Il faut également que la culture du savoir que le sujet maîtrise puisse lui donner des outils pour identifier des objets de la situation par des objets du savoir, et réaliser sur ces objets les traitements selon les algorithmes, énoncés, jugements dont il a la maîtrise dans le domaine du savoir.

À un savoir bien identifié, dans une institution donnée, correspond un ensemble de situations qui sont spécifiques de ce savoir. Ce savoir permet de reconnaître et de décrire les connaissances utiles à un sujet pour prendre les décisions adéquates à la réalisation de son projet.

Chevallard (1991, 1994 et 1999) a étudié les transformations successives des savoirs mathématiques qualifiés de savoir « savant » en savoir « à enseigner » ou effectivement « enseigné », ce qui a donné la notion de « transposition didactique ».

2.2 Transposition didactique

La transposition didactique [2] étudie les choix, les découpages, les transformations des savoirs pris à un moment donné comme références dans les différentes institutions. Le phénomène de transposition didactique se manifeste par ces étapes : la production du savoir par la communauté des mathématiciens, les choix à effectuer sur les savoirs à enseigner, les choix sur les découpages de ces savoirs, les choix sur la recontextualisation de ces savoirs, les savoirs effectivement enseignés, les savoirs effectivement acquis par les élèves, etc.

L'enseignement est le résultat d'un traitement didactique obéissant à des contraintes précises : on distingue entre le savoir savant (tel qu'il émane de la recherche), et le savoir enseigné (celui que l'observateur rencontre dans les pratiques de classe). La transposition didactique, modélisée dans les travaux de Chevallard (1991, 1994 et 1999), est constituée des mécanismes qui permettent le passage d'un objet de savoir à un objet d'enseignement.

La transposition didactique est l'ensemble des transformations, « transposition externe » et « transposition interne », que subit un savoir aux fins d'être enseigné (Chevallard, 1991, 1994). Elle renvoie à plusieurs types de savoirs ou plusieurs variantes du même savoir. Notons que c'est le même savoir qui se transforme.

2.3 Théorie anthropologique du didactique - TAD[2]

La TAD, à la suite de la transposition didactique, selon Comiti (2014, p. 447) « distingue des types d'objets particuliers : les institutions, les individus et les positions qu'ils occupent dans les institutions. En venant occuper ces positions, les individus deviennent les sujets des institutions – sujets actifs qui contribuent à faire vivre les institutions par le

2 Chevallard (1998, 1999).

fait même de leur être assujettis. La TAD conduit alors à regarder l'enseignement d'une discipline, notamment des mathématiques, dans un univers plus vaste que celui de la discipline – celui de l'école d'abord, celui de la société ensuite, celui de toute une civilisation enfin –, en vue d'analyser au plus large les conditions et les contraintes qui pèsent sur cet enseignement ».

Par ailleurs, la TAD, et en particulier le concept de « praxéologie », articule quatre dimensions (type de tâches, technique, technologie, théorie). La TAD propose un modèle dans lequel « toute activité humaine consiste à accomplir une tâche t d'un certain type de tâche T, au moyen d'une certaine technique τ, justifiée par une technologie θ qui permet en même temps de la penser, voire de la produire, et qui à son tour est justifiable par une théorie Θ. En bref, toute activité humaine met en œuvre une organisation qu'on peut noter [T, τ, θ, Θ] et qu'on nomme praxéologie, ou organisation praxéologique » (Chevallard, 2002, p. 9).

« La théorie anthropologique du didactique se donne comme programme de recherche l'étude des conditions et des contraintes de la diffusion des savoirs et savoir-faire – regardés comme étroitement imbriqués et modélisés par les praxéologies – vers les personnes et les institutions » (Wozniak, 2015, p. 150).

N. B. : Nous ne faisons ici que présenter rapidement quelques éléments de la TAD car nous n'avons pas utilisé cette théorie pour construire nos outils dans le cadre de la formation.

2.4 Théorie des champs conceptuels

D'autres théories sont convoquées et circonscrivent différemment la connaissance et le savoir. C'est le cas de la théorie des champs conceptuels dans laquelle Vergnaud (1991a) développe ces concepts.

Vergnaud (1991b), dans son ouvrage emblématique *L'Enfant, la mathématique et la réalité*, affirme que « la connaissance – ici mathématique – naît de la résolution de problèmes du monde réel, et intervient pour leur résolution ». L'action joue un rôle décisif dans la construction et dans l'exercice d'une connaissance. Vergnaud théorise ceci en développant l'idée d'un double point de vue sur la connaissance : la connaissance a une dimension **prédicative** (**concepts** et **champs conceptuels**) et une dimension **opérative** (**opérations de pensée** et **schèmes**). Il précise aussi que l'action va mobiliser un ensemble important de connaissances que la théorie ne met pas en évidence ou n'explicite pas. Plus précisément, il définit ces dimensions ainsi : « La **forme opératoire de la connaissance** est, par définition, celle qui est mise en œuvre dans l'action en situation, qu'il s'agisse de situations d'ordre technique sur et avec le monde matériel, ou de situations de communication, de coopération et de conflit avec autrui. La plupart du temps, notamment dans les situations scolaires et dans les situations de travail, coexistent les actions matérielles et les actions sur l'environnement social. La **forme prédicative de la connaissance** est celle qui exprime, dans le langage ordinaire, dans des langages techniques, ou dans des formes symboliques appropriées, les relations entre les objets, leurs propriétés, leurs transformations [...]. L'action en situation est un moyen essentiel d'étudier l'évolution de la pensée au cours du développement et de l'expérience. C'est aussi un moyen d'analyser les différences entre individus » (Vergnaud, 2011, p. 47).

La situation constitue un déterminant essentiel : « Le behaviorisme influençait encore largement les psychologues, et offrait, comme modèle princeps de la relation du sujet au réel, le couple stimulus/réponse : notamment pour conduire des recherches empiriques. Aujourd'hui je voudrais proposer, comme une meilleure théorisation, le couple **situation/schème**. Ce couple théorique est plus juste et plus fécond, non seulement que le couple stimulus/réponse, mais aussi que le couple objet/sujet » (Vergnaud, 2009, p. 7).

Nous retenons notamment de Vergnaud (1991a) les définitions du concept, de schèmes et de champ conceptuel.

2.4.1 Le concept

Pour Vergnaud (1991a), un **concept** est un triplet de trois ensembles : S, I, L où S désigne les situations dans lesquelles le concept fonctionne, I les invariants opératoires et L les formes langagières.

- **Les situations (S)** : l'élève construit les concepts mathématiques à travers les nombreuses situations qui lui sont proposées, « ce **sont les situations qui donnent sens** au concept, mais le sens n'est pas dans les situations elles-mêmes » (Vergnaud, 1991a, p. 158). Le sens qui se construit est « une relation du sujet aux situations et aux signifiants » (Vergnaud, 1991a, p. 158). Les classes de situations qui donnent du sens au concept sont appelées « **la référence** ». Vergnaud en donne deux exemples dans ses travaux sur les structures additives et multiplicatives.
- **Les invariants opératoires (I)** sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes (**le signifié**). **Vergnaud distingue des invariants opératoires de trois types logiques** : les invariants de type « propositions », les invariants de type « fonction propositionnelle » et ceux de type « argument ».
    - **Les invariants de type « propositions »** : Les théorèmes-en-acte en sont un exemple. Un théorème-en-acte désigne « les propriétés, des relations saisies ou utilisées par l'élève en situation de résolution de problème, étant entendu que cela ne signifie pas qu'il est capable pour autant de les expliciter ou de les justifier ». Exemple : la commutativité de l'addition que l'élève découvre. Le théorème-en-acte renvoie à une proposition de pensée tenue pour vraie par l'élève relativement à un ensemble de situations d'action.

- **Les invariants de type « fonction propositionnelle »** : ils sont indispensables à la construction de propositions ; les concepts-en-acte ou catégories-en-acte en font partie. Le concept-en-acte consiste en une catégorie de pensée tenue pour pertinente par l'élève relativement à un ensemble de situations d'action.
- **Les invariants de type « argument »** : en mathématiques, les arguments peuvent être des objets, des nombres.

Les invariants opératoires que sont « les concepts-en-acte et les théorèmes-en-acte » s'appuient sur des termes mathématiques intentionnellement. « C'est essentiellement à ces deux catégories d'invariants que nous allons nous référer pour nos analyses. Un concept-en-acte est un concept tenu pour pertinent dans l'action en situation ; et un théorème-en-acte est une proposition tenue pour vraie » (Vergnaud, 2011, p. 44).

- **Les formes langagières et non langagières (L)** qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (**le signifiant**). Exemple : l'élève découvre que lorsqu'il fait une soustraction, la réponse est plus petite que le premier terme et il **l'explicite**.

2.4.2 Les schèmes

Au cœur de la théorie des champs conceptuels, Vergnaud (1991a) définit le schème comme « **l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situations donnée** » (Vergnaud, 1991a, p. 136). Pour ce dernier, « c'est à travers des situations et des problèmes à résoudre qu'un concept acquiert du sens pour l'enfant [...] » (Vergnaud, 1991a, p. 135). Il distingue alors deux classes de situations :

1. Des classes de situations où le sujet a des compétences pour traiter immédiatement la situation, selon son niveau développemental et en fonction de certaines circonstances.
2. Celles où le sujet n'a pas toutes les compétences et doit conséquemment avoir un temps de réflexion et d'exploration, avec des hésitations, des essais, pour soit réussir ou soit échouer.

Ainsi, le concept de « schème » joue, de différentes manières, un rôle important dans chacune des classes de situations. Dans la première (1), il y a « pour une même classe de situations, des conduites largement automatisées, organisées par un schème unique » (Vergnaud, 1991a, p. 136). Dans la deuxième classe de situations, c'est plutôt « l'amorçage successif de plusieurs schèmes qui peuvent entrer en compétition et qui, pour aboutir à la solution recherchée, doivent être accommodés, décombinés et recombinés ; ce processus s'accompagne nécessairement de découvertes » (Vergnaud, 1991a, p. 136).

Pour appuyer le propos, Vergnaud (1991a, pp. 137-138) réfère au fonctionnement cognitif de l'élève. Celui-ci « comporte des opérations qui s'automatisent progressivement (changer de signe quand on change de membre, isoler *x* d'un côté du signe d'égalité) et des décisions conscientes qui permettent de tenir compte des valeurs particulières des variables de situation. La fiabilité du schème pour le sujet repose en dernier ressort sur la connaissance qu'il a, explicite ou implicite, des relations entre l'algorithme et les caractéristiques du problème à résoudre ».

Notons que, pour une classe de situations données, si l'automatisation fait partie des manifestations de l'organisation de l'action, notamment son caractère invariant, « une suite de décisions conscientes peut aussi faire l'objet d'une organisation invariante […] l'automatisation n'empêche pas que le sujet conserve le contrôle des conditions sous lesquelles telle opération est appropriée ou non ». Un exemple concret fondé sur l'une des techniques opératoires, l'algorithme de l'addition en lien avec la numération positionnelle décimale, illustre très bien la situation. Si l'exécution par la plupart des apprenants, à la fin de l'école primaire, des techniques propres à cet algorithme est effectuée de manière automatisée, il n'en demeure pas moins que certains peuvent « générer une suite d'actions différentes en fonction des caractéristiques de la situation : retenue ou pas, zéro intercalaire ou pas, décimal ou pas » (Vergnaud 1991a, p. 138).

Également, toute conduite intègre à la fois une part d'automaticité et de décision consciente. L'exemple de l'algorithme : « des objets du même type logique que les algorithmes : il leur manque éventuellement l'effectivité, c'est-à-dire la propriété d'aboutir à coup sûr en un nombre fini de pas. Les schèmes sont souvent efficaces, pas toujours effectifs » (Vergnaud, 1991a, p. 138).

En somme, un schème comprend nécessairement quatre composantes :

- Un but (ou plusieurs), des sous-buts et des anticipations.
- Des règles d'action, de prise d'information et de contrôle, qui s'avèrent décisives pour sélectionner l'information pertinente et générer les actions au fur et à mesure : par exemple lorsqu'un enseignant se trouve face à de nombreux élèves qui prennent la parole de manière désordonnée.
- Des invariants opératoires, c'est-à-dire des théorèmes-en-actes (propositions tenues pour vraies sur le réel) et des concepts-en-actes (concepts pertinents pour la construction de ces théorèmes-en-acte).
- Des possibilités d'inférence.

Quasi automatisés, les schèmes sont difficiles à expliciter. Pour passer de la forme opératoire (c'est-à-dire des concepts et des théorèmes-en-acte que sont les propriétés, les relations, les transformations, les processus utilisés dans l'action) à la forme prédicative (c'est-à-dire à des textes et énoncés), il faut aussi des schèmes. Ce sont des schèmes d'énonciation.

3 DES OUTILS DE FORMATION : APPLICATIONS DIRECTES DES ÉLÉMENTS DE THÉORIES AU SERVICE DE LA PRATIQUE

Dans cette partie, nous présentons des applications directes des concepts et notions que nous venons d'exposer. Ces outils sont notamment issus de la théorie des champs conceptuels.

Dans un premier temps, nous présentons des indicateurs pour penser une analyse conceptuelle. Cette dernière vise à identifier les différentes conceptions (les différents sens mais aussi les différentes situations qui leur donnent sens) qui participent de la construction du concept. Elle débouche sur une grille d'analyse opérationnalisant cette démarche et sur une carte conceptuelle en lien avec la cartographie/continuum de concepts du programme. La carte conceptuelle permet de mettre en évidence les liens existants entre les différentes conceptions et la cartographie/continuum explicite l'organisation et la planification de ces liens dans les curricula.

Cet ensemble d'outils, résultats d'une application à l'enseignement de concepts élaborés dans le cadre de recherches, est ici présenté de manière décontextualisée pour permettre une appropriation par tous. Des exemples sur l'enseignement des fractions et de la numération illustrent ces différents outils.

3.1 Indicateurs pour une analyse conceptuelle

La didactique des mathématiques s'est développée par l'intégration de différentes perspectives théoriques pour se doter d'outils conceptuels et méthodologiques afin de traiter, sous différents angles, l'activité mathématique des enseignants et des élèves de leur classe. Ce développement a ouvert la voie à tout un courant de recherches participatives, permettant d'expérimenter, avec les acteurs du milieu, des situations d'enseignement-apprentissage. Par ailleurs, la formation dans le cadre du projet APPRENDRE de l'AUF vise le renforcement des compétences en didactique des mathématiques des formateurs. Ce renforcement passe par le recours à des outils didactiques. D'ailleurs, Brousseau (1998a), dans son ouvrage *Théorie des situations didactiques*, l'expose clairement et sous différents angles (didactique, mathématique, méthodologique…) dans le chapitre 6 intitulé « L'utilité et intérêt de la didactique des mathématiques pour un professeur de collège », chapitre que l'on peut utiliser pour des formateurs de formateurs.

L'analyse conceptuelle, telle que nous l'entendons, couvre les dimensions épistémologique et mathématique d'un concept mathématique ainsi que les processus d'apprentissage d'un point de vue psychogénétique en vue de saisir les conditions à mettre en place pour en faire un objet d'enseignement. Ces analyses ont d'abord été menées essentiellement par des mathématiciens et des psychologues dédiés à l'éducation mathématique. Elles ont permis, à titre d'exemple, d'identifier différentes conceptions ou stratégies spécifiques à l'apprentissage d'un concept mathématique, de renouveler le rôle de l'erreur, ou encore de cerner certains obstacles d'ordre ontogénique, didactique et épistémologique.

Une analyse conceptuelle est une étude de divers modes de représentations contribuant à l'enrichissement de la compréhension d'un concept (Deblois, 1996). La carte conceptuelle est une représentation graphique d'un domaine de connaissance tel que perçu par un ou plusieurs individus qui établit des liens entre différents concepts évoqués par son ou ses auteurs (Laflamme, 2006, p. 8). La carte conceptuelle est un outil efficace pour apprendre à tous les niveaux scolaires ou professionnels et elle aide à apprendre comment apprendre (Novak, 2002). La carte conceptuelle peut fonctionner comme un artefact à travers lequel des apprenants démontrent une compréhension progressive d'un réseau de concepts et développent leurs connaissances par collaboration et coopération (Novak, 2010, 1998).

3.2 Grille d’analyse conceptuelle

Conçue à partir des trois éléments qui définissent un concept selon la théorie des champs conceptuels, la grille d’analyse conceptuelle est un ensemble de questions relatives à un concept donné. C’est un outil pour l’enseignant qui prépare sa classe en vue d’enseigner un concept. Il a besoin de puiser dans son expérience et dans sa culture académique et didactique pour trouver des éléments de réponses pertinents à chacune des questions de la grille.

L’analyse conceptuelle constitue un moment de l’analyse à priori d’**un concept mathématique**, laquelle, selon Chesnais et Coulange (2022), permet d’anticiper les ajustements (voir chapitre 3). L’analyse conceptuelle permet :

- d’adapter les questions des situations, des activités pour les rendre congruentes avec les objectifs ;
- d’adapter les situations, les activités au groupe-classe (à sa complexité, ses spécificités, aux contraintes matérielles, au dynamisme de la classe, etc.) ;
- de définir les objectifs intermédiaires et, au besoin, d’introduire des questions intermédiaires ;
- d’anticiper les difficultés, les erreurs, les fausses conceptions… et ainsi de mieux intervenir et relancer les élèves ;
- d’anticiper différentes procédures, techniques ou méthodes de résolution ;
- de faire des analyses épistémologiques, historiques et autres en vue de sélectionner les situations, les activités signifiantes et pertinentes (qui permettent l’enseignement et l’apprentissage de la notion ou du concept) et qui induisent des activités mathématiques riches afin d’éviter des devoirs trop difficiles (ce qui met souvent les élèves dans une impasse) ou trop faciles pour les élèves (ce qui ne permet pas de vérifier la réalisation de nouveaux apprentissages) ;
- de faire des analyses mathématiques, didactiques et autres pour mieux expliciter les questions (éviter des questions ambiguës ou erronées).

La grille d’analyse comporte une quinzaine de questions permettant d’explorer les trois composantes du concept :

- la référence (les situations),
- le signifié (les invariants opératoires),
- le signifiant (les formes langagières ou non langagières).

Tableau 3 :
Grille d'analyse conceptuelle axée sur les trois dimensions définissant un concept selon Vergnaud (1991a, p. 145)

Nº	Questions spécifiques au concept pour guider l'analyse conceptuelle
1	Quelles sont les situations, les activités signifiantes et pertinentes qui permettent l'enseignement et l'apprentissage de la notion ou du concept et qui induisent des activités mathématiques riches (la référence) ?
2	Quel est spécifiquement le contenu mathématique concerné par les situations signifiantes et pertinentes ?
3	Quelles ressources (matérielles ou autres) peuvent être utilisées pour exploiter les situations signifiantes et pertinentes ?
4	Quelles difficultés ces ressources (matérielles ou autres) ou toute autre variable didactique (par exemple les données numériques ou contextuelles) choisies peuvent-elles amener ?
5	Quelles sont les techniques, procédures et approches que pourrait mettre en évidence l'élève et sur lesquelles reposerait l'opérationnalité des schèmes (le signifié) ?
6	Quels raisonnements mathématiques possibles l'élève peut-il mettre en évidence au regard de ces techniques, procédures et approches ?
7	Quelles difficultés possibles peuvent être révélées chez l'élève au regard de ces techniques, procédures et approches ?
8	Quelles erreurs mathématiques possibles l'élève peut-il mettre en évidence au regard de ces techniques, procédures et approches ?
9	Quelles pourraient être les causes possibles des difficultés que l'élève peut rencontrer et des erreurs mathématiques qu'il peut commettre au regard de ces techniques, procédures et approches ?
10	Quels sont les ajustements, les relances, c'est-à-dire les interventions possibles à apporter pour mieux adapter la situation ou l'activité au niveau des élèves ou au programme en vigueur ?
11	Quelles sont les anticipations mathématiques possibles que l'élève pourrait faire au regard de ces techniques, procédures et approches ?
12	Quels sont les liens que l'élève peut faire avec d'autres concepts mathématiques (vus ou non) au regard des techniques, procédures et approches, en lien avec le concept à l'étude ?
13	Quelles sont les fausses conceptions que l'élève pourrait avoir en lien avec le concept à l'étude ?
14	Quelles sont les formes langagières qui permettent de verbaliser les propriétés, les situations et les procédures de traitement mathématiques en lien avec le concept à l'étude (le signifiant) ?
15	Quelles sont les formes non langagières qui permettent de représenter symboliquement les propriétés, les situations et les procédures de traitement en lien avec le concept à l'étude (le signifiant) ?
16	Quelles sont les formes langagières ou non langagières qui pourraient être source de difficultés pour l'élève (le signifiant) ?

De l’analyse conceptuelle (grille d’analyse conceptuelle) à la cartographie/continuum et à la carte conceptuelle : des ressources au service de la pratique

La grille d'analyse conceptuelle que nous venons de présenter aide à circonscrire un concept donné en fonction des trois composantes, en lui donnant ainsi une vue d'ensemble. Nous allons développer dans les sections qui suivent les deux autres ressources.

Dans le cadre de leurs recherches avec les enseignants et le milieu de pratique (Adihou *et al.*, 2017 ; Adihou *et al.*, 2018 ; Turgeon *et al.*, 2019 ; Adihou *et al.*, 2021) qui visent à les outiller et à produire des ressources pour un concept donné, l’analyse des programmes et la progression des apprentissages font ressortir une catégorisation comportant cinq rubriques :

- Sens et représentation.
- Techniques opératoires (et relations).
- Usage et utilisation (dans des situations spécifiques relevant des concepts à l’étude).
- Propriétés et transformations.
- Liens avec des domaines mathématiques.

Notons que les cinq rubriques sont lisibles (même si les dénominations peuvent différer) dans la structuration de plusieurs programmes d’études en mathématiques qui ont pu être analysés dans le cadre des ateliers de formation de renforcement des compétences didactiques.

Le tableau de la cartographie/continuum (voir ci-dessous) montre les contenus et l’évolution d’une notion dans toutes les classes et pour toutes les classes. La cartographie/continuum permet de prendre connaissance d’un programme avec une vue verticale et horizontale.

Lors de la préparation des interventions pour la formation, en analysant les programmes des pays, on remarque les mêmes rubriques et le même niveau de profondeur pour les cartes conceptuelles (les sous-concepts) données par les programmes. C’est pour cela qu’il est important de partir de la cartographie/continuum pour déboucher sur la carte conceptuelle. Pour faire le lien avec la cartographie/continuum et la carte conceptuelle, les mêmes catégorisations sont reprises au premier niveau (voir les cinq rubriques de la cartographie/continuum). Pour le deuxième niveau, qui vise à positionner les sous-concepts, ces derniers comportent ceux de la cartographie/continuum en lien avec le programme d’étude concerné. Ce deuxième niveau est ensuite amélioré, avec des ajouts de sous-concepts, extraits de l’analyse conceptuelle, qui vont au-delà de ceux qui sont mis en évidence dans la cartographie/continuum propre au programme.

Les auteurs admettent l'hypothèse que, pour un concept donné, l'analyse de tout programme comporte cette catégorisation (un travail plus approfondi d'un pays à l'autre serait une recherche à faire).

3.3 Cartographie/continuum

La **cartographie/continuum** du programme est une vue synthétique du programme pour un concept donné. Elle met en évidence les différentes notions à aborder et présente leur évolution dans le cycle.

Comment réaliser une cartographie/continuum d'un concept :

1. Recenser tous les sous-thèmes relatifs à un concept (du domaine ou du programme) et positionner les sous-thèmes par rapport au niveau scolaire en mettant des signes (x, o, ...) et en utilisant un tableau. On peut jouer avec deux signes pour distinguer les dimensions outil/objet (Douady, 1986).
2. Associer clairement dans un tableau les niveaux scolaires respectifs où les sous-thèmes sont prévus dans le domaine ou le programme.
3. Se servir de **l'analyse conceptuelle et faire une analyse mathématique et didactique pour catégoriser les sous-thèmes**. Les cinq catégories de la cartographie/continuum pourront servir à structurer le premier niveau (de profondeur) de la carte conceptuelle. Les sous-concepts ayant contribué à la catégorisation serviront à finaliser le deuxième niveau (de profondeur) de la carte conceptuelle.

3.3.1 Exemple de catégorisation d'un concept pour la conception de la cartographie/continuum

CATÉGORIES
Sens et représentation
Techniques opératoires (et relations)
Usage et utilisation (dans des situations spécifiques relevant des concepts à l'étude)
Propriétés et transformations
Liens avec des domaines mathématiques

3.3.2 Tableau pour concevoir une cartographie/continuum

NOM DU CONCEPT

CATÉGORIES	SOUS-CONCEPTS	NIVEAUX SCOLAIRES					
		CI	CP	CE1	CE2	CM1	CM2
Sens et représentation							
Techniques opératoires (et relation)							
Usage et utilisation (dans des situations spécifiques relevant des concepts à l'étude)							
Propriétés et transformations							
Liens avec des domaines mathématiques							

3.4 Carte conceptuelle

La carte conceptuelle est une représentation graphique d'un domaine de connaissance tel que perçu par un ou plusieurs individus, et qui établit des liens entre différents concepts évoqués par son ou ses auteurs (Laflamme, 2006, p. 8).

La carte conceptuelle pour un concept donné est un modèle qui se construit à partir des cinq catégories de la cartographie/continuum (voir premier niveau de profondeur). Les sous-concepts ayant contribué à la catégorisation dans la cartographie-continuum serviront à finaliser le deuxième niveau de profondeur de la carte conceptuelle. À ces sous-concepts s'en ajoutent d'autres, circonscrits dans l'analyse conceptuelle.

Ainsi, la carte conceptuelle explicite les liens entre ce concept et les sous-concepts qui caractérisent ce concept. Elle peut permettre également d'établir des liens entre les différents sous-concepts. Elle présente les sous-concepts (savoirs mis en jeu) du programme et elle met en évidence, pour le formateur et l'enseignant, d'autres sous-concepts qui ne sont pas dans le programme. En ce sens, elle n'est pas déconnectée du programme et donc de la cartographie/continuum. Elle peut se présenter sous la forme d'un arbre. Ces deux ressources permettent de lire facilement les objets, les outils, les domaines mathématiques, les articulations et la progressivité. Elles sont appuyées et fondées sur des assises théoriques et pratiques en didactique des mathématiques (résultats de recherches sur la notion en jeu, études didactiques et épistémologiques). Elles sont des ressources pour les formateurs (inspecteurs, conseillers pédagogiques, formateurs dans les écoles normales supérieures) lorsqu'ils interviendront auprès des enseignants en formation continue, par le biais d'un module qui a été élaboré, afin que ces derniers se les approprient et les utilisent dans la préparation et la réalisation de leur enseignement.

La carte conceptuelle est un outil efficace pour apprendre à tous les niveaux scolaires ou professionnels et elle aide à apprendre comment apprendre (Novak, 2002). Elle est ainsi un outil indispensable pour mieux circonscrire un concept donné en vue de l'enseigner. La carte conceptuelle peut fonctionner comme un artefact à travers lequel des apprenants démontrent une compréhension progressive d'un réseau de concepts et développent leurs connaissances par collaboration et coopération (Novak, 2010, 1998). Ainsi, le lecteur trouvera au chapitre 4 deux exemples commentés d'application des outils présentés dans ce chapitre à l'enseignement des fractions et à celui de la numération.

La cartographie/continuum et la carte conceptuelle sont deux outils pertinents pour l'enseignant et qui l'aident dans sa planification et dans la conception des fiches pédagogiques. Précisons que la cartographie/continuum et la carte conceptuelle font partie d'un ensemble de ressources ayant reçu le prix du meilleur matériel numérique didactique de l'Association mathématique du Québec (Adihou, 2018).

La grille d'analyse conceptuelle, la cartographie/continuum et la carte conceptuelle sont des ressources importantes pour concevoir la fiche pédagogique. Notons que ces ressources ont été améliorées au fur et à mesure des formations données lors des ateliers dans plusieurs pays (Bénin, Cameroun, Congo, Niger, Togo, etc.) par les experts concernés.

4 BIBLIOGRAPHIE

Adihou, A., **Brisson, O.** et **Leroux, A.-J.** (2018). Des ressources qui articulent des concepts mathématiques et didactiques : pour quelle formation, quel enseignement et quels apprentissages ?. *Actes de la CIRTA*, Canada, 63-68.

—, **Marchand, P.**, **Bisson, C.**, **Roy, J.**, **Turgeon, J.**, **Favreau, M.** et **Morelli, C.** (2021). Collaboration entre divers partenaires pour mieux intervenir en mathématiques auprès des élèves en difficulté en misant sur le développement de leur potentiel mathématique. Dans P. Marchand, A. Adihou, J. Koudogbo, D. Gauthier et C. Bisson (dir.), *La recherche en didactique des mathématiques et les élèves en difficulté : Quels enjeux et quelles perspectives ?* (pp. 111-131), Les Éditions JFD Inc.

Brousseau, G. (1998a). *La théorie des situations didactiques. Recueil de textes de didactique des mathématiques 1970-1990, présentés par M. Cooper et N. Balacheff, Rosamund Sutherland et Virginia Warfield.* La Pensée sauvage.

Chesnais, A. et **Coulange, L.** (2022). L'analyse a priori, un outil pour « penser » les ajustements didactiques en classe de mathématiques ? Éducation et socialisation [en ligne]. *Éducation et socialisation. Les Cahiers du CERFEE*, 66. URL : https://doi.org/10.4000/edso.21357, mis en ligne le 09 décembre 2022, consulté le 13 juillet 2023.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné* [réédition revue et augmentée avec un exemple d'analyse de la transposition didactique d'Y. Chevallard et M.-A. Johsua]. La Pensée sauvage.

— (1994). Les processus de transposition et leur théorisation. Dans G. Arsac, Y. Chevallard, J.-L. Martinand et A. Tiberghien (dir.), *La transposition didactique à l'épreuve* (pp. 135–180). La Pensée sauvage.

— (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques : L'approche anthropologique. Dans R. Noirfalise (dir.), *Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques*. *Actes de l'université d'été de didactique de La Rochelle* (pp. 119-140), IREM de Clermont Ferrand.

— (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(2), 221-266.

— (2002). Organiser l'étude. 3. Écologie & régulation. Dans *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 41–56), La Pensée sauvage.

Clerc, J.-B., **Minder, P.** et **Roduit, G.** (2006). *La transposition didactique*. HEP. https://lyonelkaufmann.ch/histoire/MHS31Docs/Seance1/TranspositionDidactique.pdf

Comiti, C. (2014). Recherche en didactique et formation des enseignants. *Perspectivas da Educação Matemática*, 15, 444-456.

Deblois, L. (1996). Une analyse conceptuelle de la numération de position au primaire. *Recherches en didactique des mathématiques*, *16*(1), 71-127.

Laflamme, A. (2006). *Carte conceptuelle : un outil pour soutenir l'acquisition des connaissances*. BENA, Université de Montréal.

Novak, J.-D. (1998). *Learning, Creating, and Using Knowledge: Concept Maps as Facilitative Tools in Schools and Corporations*. Lawrence Erlbaum Associates.

— (2002). Meaningful learning: the essential factor for conceptual change in limited or appropriate propositional hierarchies (LIPHs) leading to empowerment of learners. *Science Education*, *86*(4), 548-571.

— (2010). *Learning, Creating, and Using Knowledge: Concept Maps as Facilitative Tools in Schools and Corporations*. Routledge.

Turgeon, J., **Marchand, P.** et **Adihou, A.** (2019). Fruits d'une collaboration entre orthopédagogues, enseignants et didacticiens des mathématiques. *Revue de l'association des orthopédagogues du Québec*, *8*, 26-41.

Vergnaud, G. (1991a). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, *10*(2-3), 133-170.

— (1991b). *L'enfant, la mathématique et la réalité : problèmes de l'enseignement des mathématiques a l'école élémentaire (4e édition)*. Peter Lang.

— (2009, 16 janvier). Activité, développement, représentation. Conférence plénière invitée au colloquium didactique des Mathématiques. Université Paris Diderot. https://www.gerard-vergnaud.org/texts/gvergnaud_2009_activite-developpement-representation_colloque-paris.pdf

— (2011). La pensée est un geste : Comment analyser la forme opératoire de la connaissance. *Enfance*, *1*(1), 37-48. https://www.cairn.info/revue-enfance-2011-1-page-37.htm

Wozniak, F. (2015). La démarche d'investigation depuis la théorie anthropologique du didactique : les parcours d'étude et de recherche. *Recherches en éducation*, 21. DOI : https://doi.org/10.4000/ree.7578, consulté le 30 juin 2023.

CHAPITRE

3

FICHES PÉDAGOGIQUES

1 INTRODUCTION

Comme pour le chapitre précédent, nous présentons dans un premier temps les outils didactiques issus de la recherche, et mobilisés pour mieux former les formateurs à la gestion d'ateliers ayant comme objectif central la production de modèle de fiches pédagogiques pour les enseignants. Nous entendons par « modèle » des exemples emblématiques de fiches à concevoir, et surtout à contextualiser, en fonction des objectifs et contraintes institutionnelles et pédagogiques de chaque pays.

Dans un deuxième temps, nous énonçons des principes pour élaborer ces fiches. Comme nous l'avons explicité précédemment, nous avons fait des choix liés aux concepts issus de la théorie des situations didactique et de la dialectique outil/objet. Ces choix ont permis de présenter les outils théoriques indispensables afin d'amorcer une réflexion sur les questions cruciales d'enseignement et de formation qui accompagnent la production de fiches pédagogiques.

Dans un troisième temps, nous introduisons des exemples d'activités sous forme de jeu à usage didactique, activités qui ont été utilisées lors des ateliers de formation, tout en invitant les formateurs à les expérimenter eux-mêmes, et à les analyser en vue d'apprécier leur potentiel. À leur tour, ceux-ci pourront les faire expérimenter auprès des enseignants et même des élèves.

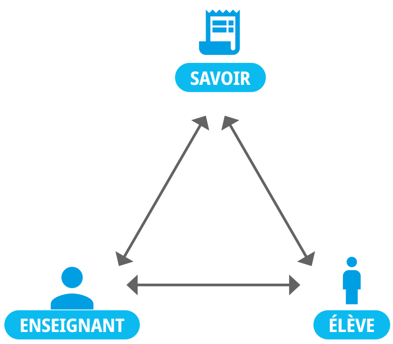
2 CADRE THÉORIQUE QUELQUES ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES SITUATIONS DIDACTIQUES

Nous présentons ci-dessous certains concepts de la théorie des situations didactiques. Ces concepts ont fait l'objet dans les dernières décennies de nombreux travaux et de développements que nous ne pouvons pas exposer dans ce guide. Comme pour les présentations des théories précédentes, cet exposé n'est donc pas exhaustif. Nous proposons néanmoins une bibliographie en fin d'ouvrage qui permettra au lecteur qui le souhaite d'approfondir ces différentes notions.

2.1 Le système didactique

La TSD étudie le système didactique (maître-élève-savoir). Le triangle didactique est un modèle qui met en relation, dans l'acte d'enseignement, trois acteurs : l'enseignant, l'élève et le savoir. Chacun de ces acteurs est situé à l'un des sommets du triangle, et les relations existantes entre ces acteurs, prises deux à deux, sont visualisées par les côtés du triangle (les interactions). Différentes lectures du triangle didactique sont possibles. Nous optons pour une lecture relationnelle qui explicite les interrelations entre les trois composantes du triangle didactique (enseignant-savoir ; savoir-élève ; enseignant-élève).

Schéma 3 : Triangle didactique



Approche épistémologique (Ens-S) : dans cette approche, on insiste sur l'importance d'une **réflexion épistémologique** sur le savoir (études historiques, genèse et évolution des connaissances…). De plus, il est intéressant d'étudier **les choix de l'enseignant**

par rapport à la connaissance (choix épistémologiques), qui dépendent de ses connaissances antérieures, de sa formation universitaire, de son vécu scolaire, etc., et qui conditionnent sa manière d'enseigner.

Approche sur les conceptions (El-S) : lorsqu'un élève aborde un enseignement, il a au moins en partie déjà construit une structuration particulière des connaissances. Celle-ci peut se révéler compatible avec les savoirs qu'on veut lui enseigner ou ne pas y correspondre, ce qui est souvent le cas pour les disciplines scientifiques. Pour cela, l'élève va mobiliser des mécanismes cognitifs afin d'apprendre ce qu'on veut lui enseigner – qu'il est important de cerner (étude des conceptions, des obstacles, des erreurs, etc.).

Approche sur les stratégies d'apprentissage (En-El) : l'axe « enseignant-élèves » est privilégié. Dans ce cas, la didactique s'intéresse particulièrement aux situations et aux procédures à mettre en place pour faciliter la structuration des connaissances et des pratiques (ou activités mathématiques) de l'élève (situation didactique, situation-problème, etc.).

2.2 Situation didactique et situation a-didactique

Brousseau (1998a) a modélisé pour une grande part ces différentes relations dans le cadre de la théorie des situations didactiques. Il introduit les concepts de situation a-didactique et de milieu :

- **La situation** est présentée par l'enseignant et aménagée au regard d'un savoir spécifique afin de mettre en interaction un milieu et l'élève.
- **Le milieu antagoniste** à l'élève : « tout ce qui agit sur l'élève ou/et ce sur quoi l'élève agit » (Brousseau, 1998a, p. 302). Dans cette situation, les élèves vont poser des actions, formuler des hypothèses et valider ces dernières lors d'interactions avec le milieu.
- **Interactions avec le milieu** : le milieu devient la cause de l'adaptation des actions de l'élève et la modification de ses connaissances (Brousseau, 1988a et b).

Un des buts de l'enseignement est d'amener le futur citoyen et futur professionnel à être capable de gérer des situations dans sa vie professionnelle et quotidienne sans avoir recours à une aide relevant d'un système d'enseignement. C'est ce que l'on appelle une situation non didactique. Une situation non didactique (relativement à un savoir) est donc une situation construite de façon que le résultat souhaité ne puisse être obtenu que par la mise en œuvre des connaissances visées, mais dont le milieu ne comporte aucun agent intervenant au cours du déroulement pour faire acquérir au sujet une connaissance déterminée : il n'y a pas d'intention d'apprentissage dans la situation.

Pour préparer l'élève à l'exercice de cette compétence, il doit être confronté suffisamment à l'école à des simulations de situation non didactique. C'est-à-dire des situations où il devra avec ses pairs mobiliser les connaissances nécessaires pour les résoudre sans intervention explicite de l'enseignant.

La situation a-didactique (relativement à un savoir) [2][1] est alors une situation construite de façon à ce que le résultat souhaité ne puisse être obtenu que par la mise en œuvre des connaissances visées, mais que l'élève ne puisse pas lire et interpréter (ou ait renoncé à lire et interpréter), pendant un temps suffisant, les intentions du professeur concernant ces connaissances, pour prendre ses décisions. Les bonnes décisions des élèves, celles qui correspondent au savoir associé, constituent des stratégies rationnelles d'action sur un milieu, que le professeur n'a pas besoin de valider, puisque le milieu s'en charge.

Les propriétés didactiques d'une situation a-didactique varient beaucoup selon que :

- la dévolution est réussie ou non,
- les connaissances dont disposent les élèves sont adaptées ou non (capacité à entrevoir une stratégie de base, capacité à la mettre en question, fonctionnalité de connaissances permettant de valider intellectuellement certaines décisions, méconnaissance préalable des stratégies gagnantes).

Dans cette situation a-didactique, les élèves vont effectuer des actions, formuler des hypothèses et valider ces dernières lors d'interactions avec le milieu. Le milieu devient la cause de l'adaptation des actions de l'élève et de la modification de ses connaissances (Brousseau, 1988a). Brousseau a modélisé ces moments de la situation a-didactique en termes de dialectiques de l'action, de la formulation et de la validation. Il distingue donc les situations a-didactique d'action, de formulation et de validation.

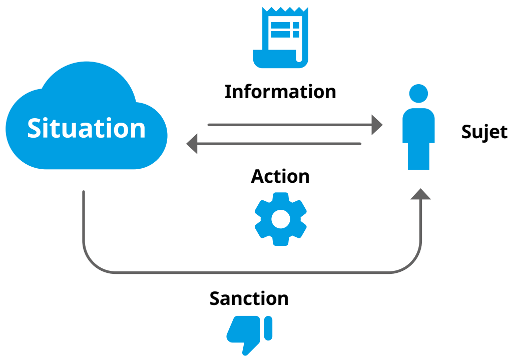
Situation (a-didactique) d'action (relative à une connaissance) [1]

Il s'agit d'une situation où la connaissance du sujet se manifeste seulement par des décisions, par des actions régulières et efficaces sur le milieu et où il est sans importance pour l'évolution des interactions avec le milieu que l'actant puisse ou non identifier, expliciter ou expliquer la connaissance nécessaire.

La dialectique de l'action consiste à placer l'élève devant une situation (d'action) lui posant un problème dont la meilleure solution, dans les conditions proposées, est la connaissance à enseigner. Il doit pouvoir agir sur la situation et se créer un modèle implicite guidant cette action. En lui renvoyant de l'information, la situation doit lui permettre de juger le résultat de son action et d'ajuster cette dernière [3].

1 Les numéros entre crochets renvoient aux différents glossaires. Voir note 2 de l'introduction générale.

Schéma 4 :
Modélisation d'une situation d'action



Situation (a-didactique) de formulation (d'une connaissance)

C'est une situation qui met en rapport au moins deux actants avec un milieu. Leur succès commun exige que l'un formule la connaissance en question (sous une forme quelconque) à l'intention de l'autre qui en a besoin pour la convertir en décision efficace sur le milieu. La formulation consiste pour ce couple d'actants à utiliser un répertoire connu pour formuler un message original, mais la situation peut conduire à modifier ce répertoire. On peut déduire théoriquement et vérifier expérimentalement qu'une formulation « spontanée » de connaissance exige que cette connaissance existe préalablement comme modèle implicite d'action chez les deux actants.

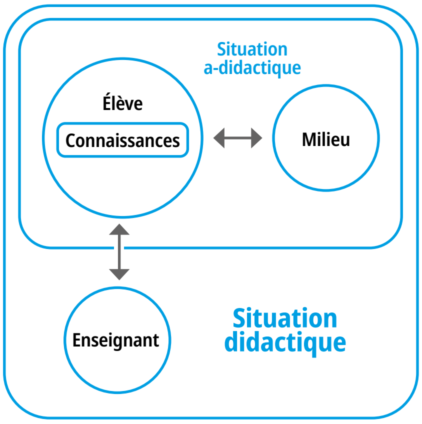
Situation (a-didactique) de validation (sociale et culturelle) [1]

Une situation de validation est une situation dont la solution exige que les actants établissent ensemble la validité de la connaissance caractéristique de cette situation. Sa réalisation effective dépend donc aussi de la capacité des protagonistes à établir ensemble explicitement cette validité. Celle-ci s'appuie sur la reconnaissance par tous d'une conformité à une norme, d'une constructibilité formelle dans un certain répertoire de règles ou de théorèmes connus, d'une pertinence pour décrire des éléments d'une situation, ou d'une adéquation vérifiée pour la résoudre. Elle implique que les protagonistes confrontent leurs avis sur l'évolution du milieu et s'accordent selon les règles du débat scientifique.

La situation didactique est alors l'ensemble des relations pertinentes (explicites ou implicites) d'un sujet (ou de plusieurs sujets) apprenant avec un sujet enseignant et avec un milieu mobilisé par ce dernier pour faire approprier un savoir déterminé.

Autrement dit, la situation didactique est constituée des interactions entre le sujet élève et l'enseignant pour un savoir donné. Brousseau (1998a) traduit cela par le schéma ci-dessous :

Schéma 5 : Situation didactique (Brousseau, 1998)



Il précise que la « **situation didactique** est une situation où se manifeste directement ou indirectement une volonté d'enseigner » (Brousseau, 1998a, pp. 279-281).

2.3 L'activité du professeur, processus de dévolution et d'institutionnalisation

La théorie des situations didactiques modélise l'activité du professeur à l'aide de deux processus : celui de dévolution et celui d'institutionnalisation. Ces processus peuvent être imbriqués dans la gestion de la situation didactique.

2.3.1 Processus de dévolution

Comment faire pour que le problème qu'a inventé l'enseignant devienne le problème que va chercher à résoudre l'élève ? Pour reprendre un vieux terme de droit adapté à la question de la transmission des savoirs : comment faire la dévolution d'une situation à un élève ?

« Dévolu » : terme de jurisprudence. Qui est transporté, transféré, échu, acquis par droit. « Dévolution » : attribution des biens à une ligne successorale par suite de l'extinction ou de la renonciation de l'autre.

On appelle « dévolution d'une situation a-didactique » l'ensemble des conditions qui permettent à l'élève de s'approprier la situation : enjeu intellectuel et contexte favorable. « La dévolution consiste non seulement à présenter à l'élève le jeu auquel le maître veut qu'il s'adonne, mais aussi à faire en sorte que l'élève se sente responsable, (au sens de la connaissance et non pas de la culpabilité) du résultat qu'il doit chercher » (Brousseau, 1988c, p. 89).

Le processus de dévolution **[3]** décrit donc l'ensemble de l'activité du professeur qui consiste à amener l'élève à s'approprier le problème à résoudre, à mobiliser les connaissances nécessaires et à assumer la responsabilité de la résolution. La dévolution est un élément important du contrat didactique. « Il ne suffit pas de "communiquer" un problème à un élève pour que ce problème devienne son problème et qu'il se sente seul responsable de le résoudre. Il ne suffit pas, non plus, que l'élève accepte cette responsabilité pour que le problème qu'il résout soit un problème "universel" dégagé de présupposés subjectifs » (Brousseau, 1988b, p. 15). La dévolution ne porte pas sur l'objet de l'enseignement, mais sur les situations qui le caractérisent. C'est un processus qui porte sur toutes les situations.

2.3.2 Processus d'institutionnalisation

L'institutionnalisation **[2]** consiste à donner un statut culturel ou social aux productions des élèves : activités, langage, connaissances.

« L'institutionnalisation porte aussi bien sur une situation d'action […] que sur une situation de formulation ou de preuve. Les maîtres doivent prendre acte de ce que les élèves ont fait, décrire ce qui s'est passé et qui a un rapport avec la connaissance visée, donner un statut aux événements de la classe comme résultat des élèves et comme résultat de l'enseignant, assumer un objet d'enseignement, l'identifier, rapprocher ces productions des connaissances des autres (culturelles ou du programme), indiquer qu'elles peuvent resservir » (Brousseau, 1988b, p. 17).

Quand un élève a résolu un problème en élaborant une nouvelle connaissance, cette dernière ne lui sera utile que s'il est capable d'y faire appel dans une autre situation. Pour cela, il faut que l'enseignant aide les élèves à identifier le savoir en jeu, à distinguer entre les résultats à retenir et ceux à oublier, etc.

Douady et Perrin (1989) situent le processus d'institutionnalisation par rapport aux aspect outil et objet d'un concept. Dans l'information traitée, l'enseignant choisit et expose, avec les conventions en usage, ce qui est nouveau à retenir. Il fait le « cours ». Ainsi, l'enseignant a la charge de donner un statut aux concepts qui, jusque-là, sont intervenus comme outils. Il constitue alors un savoir de classe auquel chacun pourra se référer.

L'institutionnalisation est un moment où le professeur peut être amené à généraliser, décontextualiser, dépersonnaliser ou formaliser les savoirs en jeu dans la situation. Charles-Pézard, Butlen et Masselot (2012) ont montré que le professeur est amené à adopter des postures différentes dans la gestion de ces processus. En effet, la dévolution implique qu'il se mette (apparemment) en retrait afin de laisser les élèves assurer la responsabilité de l'apprentissage, alors que l'institutionnalisation nécessite qu'il « reprenne la main ». L'adoption de chacune de ces postures nécessite la mobilisation de gestes professionnels qui ne peuvent s'acquérir par la seule expérience de la classe, mais nécessite une formation (initiale comme continue). Le passage d'une posture à l'autre peut être très rapide et nécessite là encore une attention en formation.

2.3.3 Le contrat didactique

Le contrat didactique est un élément déterminant dans la modélisation de la situation didactique. Brousseau (1986a) définit le contrat didactique comme « le résultat de la négociation des rapports établis explicitement et/ou implicitement entre un élève ou un groupe d'élèves, un certain milieu et un système éducatif, aux fins de faire approprier aux élèves un savoir constitué ou en voie de constitution » (Brousseau, 1986a, p. 50). Il précise cette définition en signalant un paradoxe : « Le contrat didactique est en fait souvent intenable. Il met le professeur devant une véritable injonction paradoxale : tout ce qu'il fait pour faire produire, par les élèves, les comportements qu'il attend, tend à priver ces derniers des conditions nécessaires à la compréhension et à l'apprentissage de la notion visée : si le maître dit ce qu'il veut, il ne peut plus l'obtenir. Mais l'élève est lui aussi devant une injonction paradoxale : s'il accepte que, selon le contrat, le maître lui enseigne les résultats, il ne les établit pas lui-même, et donc il n'apprend pas les mathématiques, il ne se les approprie pas. Apprendre implique pour lui de refuser le contrat, mais aussi d'accepter la prise en charge » (Brousseau, 1998, 2010 ; glossaire de Copirelem [2]).

De ce fait, l'apprentissage va reposer non pas sur le bon fonctionnement du contrat, mais sur ses ruptures [3].

2.4 Dialectique outil/objet, cadre, jeu de cadre et registre

Nous complétons cette approche par certains éléments issus de la dialectique outil/objet (Douady, 1984) et des approches en termes de registre (Duval, 1991, 1993, 1995, 2006).

2.4.1 Concept, outil/concept, objet, cadre et jeu de cadre

Douady (1984) a introduit en didactique des mathématiques la notion de « changements de cadre », de « jeu de cadre » et de « dialectique outil/objet ». La dimension outil/objet, et plus précisément la dialectique outil/objet, « fait référence aux changements de statut des connaissances, à la façon dont ces changements interviennent dans l'organisation du savoir culturellement reconnu et à la façon dont ce savoir joue dans le progrès scientifique. On sait bien toutefois que ces changements diffèrent selon les concepts, et que l'évolution historique peut être très différente de ce qu'on peut observer ou organiser dans un contexte scolaire. [...] Dans l'enseignement, on peut focaliser son attention sur l'aspect fonctionnel, sur l'aspect descriptif, sur l'aspect explicatif, faire interagir ces différentes préoccupations. Tout objet institué est un outil potentiel. Ainsi peut s'installer, de façon générale, mais non exclusive, une dialectique entre les statuts outil et objet d'un concept » (Douady, 1993, p. 191).

2.4.2 Cadre et jeu de cadre

La dialectique outil/objet est associée aux notions de « changement » et « jeu de cadre ».

- **Cadre :** un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales que le sujet associe à un moment donné à ces objets et à ces relations [3]. Ainsi, nous empruntons à Rogalski (2019) quelques exemples d'emboîtements ou de relations d'inclusion autour d'objets plus précis, pour illustrer cette définition :

  « **(a1)** On dispose, en géométrie élémentaire plane, de plusieurs sous-cadres :

  - Ponctuel (figures, en affine ou euclidien, transformations) ;
  - Vectoriel (vecteurs, relation de Chasles, produit scalaire...) ;
  - Numérique (calcul sur des coordonnées, ou sur des nombres complexes, utilisation de mesures : longueurs, aires, angles...).

  (a2) L'objet "fonction" appartient naturellement à plusieurs cadres. Selon les problèmes qu'on cherche à résoudre sur les fonctions, on pourra invoquer :

  - Le cadre de l'analyse (propriétés de continuité, dérivabilité...) ;
  - Le cadre ensembliste (applications, équations, injectivité et surjectivité, fonctions réciproques, images réciproques...) ;
  - Le cadre algébrique (types de fonctions et des formules les définissant et les régissant : polynomiales, circulaires...) ;

- Le cadre géométrique (graphes de fonctions ayant des propriétés géométriques particulières : droites, paraboles et hyperboles, questions d'asymptotes, de convexité…) ;
- Le cadre de l'analyse fonctionnelle (on est alors aussi dans le cadre ensembliste : les fonctions deviennent des éléments d'ensembles de fonctions, on a des applications entre ensembles de fonctions, des équations fonctionnelles…) ;
- Le cadre de l'analyse numérique (approximation et méthodes de calcul numérique). »

Un concept mathématique peut être mobilisé dans plusieurs cadres (physique, numérique, géométrique, graphique, informatique) entre lesquels s'établissent des relations contribuant à la connaissance de ce concept.

- **Changement de cadre :** « Un changement de cadre est une mise en relation intéressée et intéressante de deux traductions d'un même problème (à résoudre) dans deux (ou plus) domaines de travail (les cadres) » (Robert, 2001a et b). Autrement dit, un changement de cadre est un moyen d'obtenir des formulations ou des représentations différentes d'un problème qui, sans être nécessairement tout à fait équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en œuvre d'outils et de techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation.
- **Jeu de cadre :** les jeux de cadre (Douady, 1986) sont des changements de cadre provoqués à l'initiative de l'enseignant, à l'occasion de problèmes convenablement choisis, pour faire avancer les phases de recherche et faire évoluer les conceptions des élèves. C'est la prévision construite par le professeur de l'utilisation par les élèves d'un changement de cadre alors qu'un seul cadre est explicite (Robert, 2001a et b).

La dialectique outil/objet est créatrice de sens. Les jeux de cadres sont source de déséquilibre ; la rééquilibration participe à l'apprentissage. Les jeux de cadres jouent un rôle moteur dans l'une des phases de la dialectique [3].

Pour Rogalski (2019) : « Ces notions s'entrecroisent de façon complexe dans le travail mathématique, au point qu'il est parfois difficile de distinguer ce qui relève de l'une ou de l'autre : les frontières sont parfois floues, des glissements de l'une à l'autre sont inévitables, voire utiles. De plus, l'utilisation de ces changements a sans doute été souvent inconsciente chez les mathématiciens du passé, mais il semble que ce ne soit plus toujours le cas aujourd'hui : des mathématiciens actuels pratiquent consciemment et volontairement les changements de cadre ou de niveau de conceptualisation, tant dans leur recherche que pour l'enseignement. Néanmoins, bien des mathématiciens, qui utilisent effectivement des changements de cadre, le font implicitement et ne sentent pas le besoin de l'expliciter. Il semble pourtant que cela peut être très utile de faire faire des changements de cadre ou registre aux élèves, en le leur disant ou non, selon le niveau, et donc de former les futurs professeurs que sont certains de nos étudiants à reconnaître ce type d'activité, ce qui est utile aussi pour organiser leurs connaissances mathématiques. »

Rogalski (2019) poursuit : « "En gros", on dit qu'on travaille dans un cadre donné si on étudie un problème dont les données, les énoncés, les outils premiers d'études se situent dans une théorie principale assez bien définie, plus ou moins vaste, ayant souvent un rapport avec un certain champ conceptuel (au sens de Gérard Vergnaud). Un cadre apparaît ainsi comme un domaine de travail. Il peut y avoir entre différents cadres des relations d'emboîtement, ou des intersections non vides, avec des frontières nécessairement un peu floues. Il s'agit surtout de points de repère, utiles pour analyser les problèmes, pour classer, pour décrire des relations, pour situer des objets mathématiques précis, donc utiles aussi pour chercher et pour enseigner, et en particulier pour prévoir des changements de cadre.

Il peut s'agir de champs très vastes : analyse, algèbre, géométrie ; ou plus restreints : géométrie élémentaire, géométrie différentielle, théorie des équations différentielles, théorie des corps, algèbre linéaire ; voire encore plus précis (on peut alors parler parfois de "sous-cadres") : géométrie vectorielle, théorie des matrices, équations différentielles linéaires... On peut assez souvent les identifier via des manuels ou des chapitres de manuels ; ou bien à travers des intitulés de programmes ; ou bien même à travers des traditions historiques... » (Rogalski, 2019, pp. 2-3).

2.4.3 Registre

Ce terme **[2]** est utilisé ici dans le sens de registre de représentation sémiotique dans l'acception que lui donne Duval. Un registre de représentation sémiotique doit permettre les trois opérations fondamentales suivantes : la formation de représentations dans le registre, leur traitement à l'intérieur du registre, la conversion vers un autre registre de représentation. Ainsi, par exemple, il distingue classiquement, quand il est question d'algèbre et de fonctions, le registre de la langue naturelle, le registre des expressions symboliques algébriques, le registre des représentations graphiques. Précisons que plusieurs cadres peuvent utiliser le même registre et que le travail dans un cadre mobilise généralement plusieurs registres.

Rogalski (2019) poursuit : « Les registres sont des modes de représentation des objets mathématiques, accompagnés de règles de traitements, qui permettent d'étudier des problèmes. Le passage d'un registre à un autre, pour un type d'objets, s'opère selon des règles de conversion plus ou moins précises, qui ne transfèrent pas nécessairement dans le registre d'arrivée toutes les propriétés accessibles dans le registre initial (car chaque registre explicite des propriétés spécifiques), et qui ne conservent pas toujours de manière isomorphe les modes de traitement (chaque registre a aussi ses traitements spécifiques). De plus, pour un type d'objets mathématiques, certains registres sont plus adaptés à certains cadres. Au point qu'il est parfois difficile de distinguer entre cadres et registres : pour quels objets, par exemple, est-on sûr de bien séparer le cadre géométrique et le registre graphique ? »

Que va-t-on chercher ailleurs par un changement de cadre, ou de registre, etc. ? Comment fonctionnent concrètement les changements de cadre, ou de registre, ou de point de vue ? Pour quelles raisons va-t-on ailleurs chercher quelque chose, et quoi ? Nous allons passer en revue plusieurs possibilités, dans lesquelles nous verrons les idées précédentes s'entrecroiser de façon parfois complexe. Nous ne prétendons ni à l'exhaustivité, ni à l'unicité de la description proposée, qui devrait certainement être approfondie.

Le jeu dans le changement de cadre : l'importation d'un objet. On va chercher dans un autre cadre un objet qui y est « implicitement », mais qui n'est pas facilement repérable dans le cadre où on travaille initialement. Cette différence entre les cadres est un « jeu de cadre », il permet d'introduire plus facilement un objet nouveau quand celui-ci existe sous une autre forme (remarquons que Douady réserve plutôt ce mot de « jeu » pour signaler le choix des cadres laissé aux élèves, dans une situation). Cette version du changement de cadre est bien adaptée à la construction de situations fondamentales pour introduire certaines notions nouvelles.

Voici un exemple qui peut se traiter de plusieurs façons : à un certain niveau de la scolarité, le cadre numérique contient les nombres décimaux, et plus généralement les nombres rationnels, seulement. Il s'agit d'introduire la racine carrée d'un nombre, par exemple $\sqrt{2}$. Or, le cadre géométrique « contient » des nombres de façon implicite, dans la mesure où certains objets géométriques « existent naturellement », c'est-à-dire ont déjà été vus dans des figures ou des énoncés géométriques.

3 DES OUTILS DE FORMATION POUR LA CONCEPTION DE FICHES PÉDAGOGIQUES

3.1 Des outils pour concevoir une fiche pédagogique

Rappelons quelques outils didactiques permettant de concevoir des fiches pédagogiques.

3.1.1 Analyse à priori

L'analyse à priori trouve ses fondements théoriques dans les travaux de Brousseau (1982a et b, 1986a et b, 1998a) et des développements de celui-ci (Artigue, 1988 ; Artigue et Douady, 1986 ; Charnay, 2003 ; Dorier, 2010 ; Vendeira-Maréchal, 2012 ; Perrin-Glorian et Hersant, 2003), dans ceux d'Assude, Mercier et Sensevy (2007) et récemment dans ceux de Koudogbo, Theis, Millon-Fauré, Assude *et al.* (2022) par des mises à l'épreuve empiriques. L'analyse à priori « constitue des outils professionnels d'aide à la décision, en permettant d'anticiper certaines réactions d'élèves et donc d'orienter certains choix de l'enseignant » (Charnay, 2003, p. 1). L'analyse à priori permet de mettre à jour les choix réalisés, et leur pertinence, dans le cadre d'une situation : « La pertinence de ces différentes valeurs s'évalue à l'aune de ce qu'elles modifient dans la hiérarchie des stratégies possibles pour résoudre la tâche » (Dorier, 2010, p. 3). S'appuyant sur les analyses préalables, cette analyse se fonde sur un ensemble d'hypothèses visant à anticiper les activités potentielles des élèves, les choix possibles, les difficultés qu'ils pourraient rencontrer à partir de la tâche qu'on leur propose. Elle vise la cohérence de la démarche d'enseignement et permet de déterminer en quoi les choix effectués permettent de contrôler les comportements des élèves et leur sens. En résumé, on pourrait dire qu'il s'agit d'associer de façon hypothétique les actions à mener au comportement prévu des élèves. En ce sens, Koudogbo, Theis, Millon-Fauré, Assude *et al.* (2022, p. 65) soulignent que l'analyse à priori « dépend du degré d'ingéniosité de l'enseignant, car le jeu sur les variables didactiques, au cœur [de cette analyse, ndla], nécessite que l'enseignant puisse avoir une maîtrise des connaissances autant mathématiques que didactiques ». Par conséquent, l'analyse à priori devrait être considérée dans les pratiques enseignantes, dans les transferts de connaissances, dans la formation initiale ou continue.

Selon Charnay et Mante (2016, p. 51), l'analyse à priori d'une séance de mathématiques permet « d'anticiper ce que les élèves vont dire ou faire face à une activité ». Elle s'appuie sur des questionnements, entre autres : « [...] quelles procédures correctes les élèves peuvent-ils utiliser pour résoudre la tâche ? Quelles erreurs les élèves risquent-ils de faire ? Quels obstacles peuvent-ils rencontrer ? De quelle façon les élèves vont-ils pouvoir investir les éléments de savoirs visés ? »

L'analyse à priori permet au chercheur, mais aussi à l'enseignant, de dresser un univers des possibles susceptibles de se dérouler en classe. Ayant anticipé ces possibilités, il peut les identifier dans l'action et prendre des décisions en fonction.

Si l'importance de l'analyse à priori, ainsi que des variables didactiques qui les déterminent, n'est plus à démontrer, pour Koudogbo, Theis, Millon-Fauré, Assude *et al.* (2022, p. 64), c'est « un outil didactique et méthodologique d'anticipation, d'observation, voire d'action qui mériterait grandement d'être connu et même vulgarisé auprès du corps enseignant ou des autres personnes ressources gravitant autour des élèves. Une telle vulgarisation est nécessaire à plus d'un titre. Primo, elle permet à l'enseignant (ou l'orthopédagogue) de connaître cet outil et de pouvoir se l'approprier graduellement. L'enseignant peut ainsi être mieux préparé au savoir à enseigner, aux variables didactiques à considérer, aux valeurs à leur attribuer ainsi qu'à leurs effets sur les stratégies possibles ou effectives des élèves. Conséquemment, il peut anticiper et prendre le recul nécessaire, pouvoir contrôler, agir/réagir *in situ*. Car pouvoir anticiper d'abord les stratégies possibles chez les élèves permet ensuite de les exploiter pour effectuer des relances dans les interactions avec les élèves ou d'apporter des aides aux difficultés anticipées lors de l'analyse a priori. »

Comment penser la préparation d'une séance, la planification et le cours au regard de l'analyse à priori ?

Il faut prendre en compte plusieurs étapes. Dans un premier temps, il faut replacer la séance par rapport à la séquence dans laquelle elle prend place et définir l'objectif de la séquence et les compétences visées. Ce travail méso étant effectué, l'enseignant cible les activités prévues lors de la séance. Il est amené à :

- définir le ou les objectif(s) spécifique(s) de la séance (voire de chaque activité prévue).
- définir la (ou les) compétence(s) visée(s).
- préciser le choix de l'activité proposée en justifiant éventuellement ce choix.
- indiquer le déroulement prévu avec les différentes phases, leurs durées.
- préciser les variables de chaque problème et, parmi celles-ci, celles qui peuvent privilégier la mobilisation des connaissances visées.

- analyser la tâche des élèves :
  - Dire ce qu'ils vont devoir faire et éventuellement indiquer les compétences prérequises.
  - Lister les réponses ou les procédures possibles en fonction des variables de la situation et parmi celles-ci les réponses et procédures attendues.
  - Lister les difficultés prévisibles et les aides éventuelles à apporter et sous quelles formes (individuelles ou collectives).
- préciser le rôle de l'enseignant (prévoir certaines interventions) et notamment les moments et les contenus des savoirs à institutionnaliser, des techniques à retenir.
- préciser les variables de commande ou les variables didactiques.

Une **variable de commande** [3] est un élément de la situation qui peut être modifié par le maître, cette variable est didactique quand un changement de valeur affecte la hiérarchie des stratégies de solutions (par le coût, la validité, la complexité).

Les exemples sont divers :

- Le matériel utilisé (ex. : papier quadrillé, papier blanc en géométrie).
- Le type de tâche (ex. : tâche de constat ou de fabrication dans la comparaison de collection d'objets au CP).
- La répartition des tâches (entre enfants, dans le temps, etc.).
- Les contraintes de la tâche (ce qui est autorisé).
- La forme du travail (individuel, par groupe).
- La gestion du temps (le temps laissé aux élèves pour résoudre un problème permet d'éliminer des procédures trop coûteuses en temps).
- La taille des nombres.

Pour simplifier, on pourrait définir les variables didactiques comme l'ensemble des paramètres ou des contraintes de la situation d'enseignement que l'enseignant peut modifier ou manipuler afin de conduire l'élève vers un apprentissage donné. Cette manipulation permet de mettre en place des obstacles didactiques que les élèves devront surmonter pour atteindre les objectifs visés. Ces variables doivent être clairement cernées et décrites en fonction des procédures qu'elles pourraient modifier et du rôle qu'elles joueront dans les démarches des élèves. Elles peuvent toucher le dispositif, les consignes, les aides prévues, les supports donnés, les instruments autorisés, etc.

3.1.2 Analyse à posteriori

L'analyse à priori est constituée d'hypothèses, alors que l'analyse à posteriori s'appuie sur un ensemble de données recueillies lors de l'expérimentation : observation d'une séance d'enseignement, productions d'élèves en classe et hors classe, interactions didactiques et de connaissances avec les élèves. Ainsi, dans le cadre de l'analyse d'une séance, l'intérêt de l'analyse à priori se trouve aussi dans la confrontation avec l'analyse à posteriori. En reprenant point par point les questions qui ont guidé à l'analyse à priori d'une séance, on peut répondre à des questions d'ordre didactique et mathématique puis analyser les réponses à ces questions en essayant d'en définir et d'en comprendre les causes, et enfin proposer d'éventuelles modifications ou d'éventuels apports. Il s'agira, concrètement, de reprendre les éléments de l'analyse à priori et de les analyser en comparaison avec ce qui s'est réellement passé dans la séance afin d'identifier les causes de cette distance et d'y remédier par la suite (se reporter au point 13 de la fiche pédagogique modèle ci-dessous, p. 85).

3.2 Fiche pédagogique modèle : un exemple de fiche pédagogique

Nous présentons ici un modèle de fiche pédagogique et un questionnement souvent proposé aux participants des ateliers pour engager la réflexion et la production.

3.2.1 Quelle fiche pédagogique ?

La conception des fiches pédagogiques s'effectue à partir du choix d'un modèle de fiche pédagogique. La démarche entourant le choix de la fiche pédagogique vise d'abord à analyser celle en vigueur dans le pays concerné pour planifier les séances d'apprentissage-enseignement et, ensuite, de faire un maillage avec la fiche pédagogique innovante proposée dans le cadre des ateliers. Il s'agit de bonifier la fiche en vigueur dans le pays en ajoutant certaines rubriques au regard des contenus mis en évidence dans l'analyse conceptuelle et dans les autres catégories (analyse à priori, types de remédiation). Ainsi, nous suggérons que la fiche pédagogique dans sa version finale comporte obligatoirement certaines rubriques et sous-rubriques. Les rubriques concernent les « obstacles possibles », les « difficultés possibles », et les « erreurs possibles ».

Chaque fiche comporte 13 sections. Pour concevoir la fiche, l'enseignant renseigne chaque section en donnant des indices sur ses intentions et son approche dans la classe.

- **Les 9 premières sections** visent à fournir des informations d'ordre général sur les intentions de l'enseignant et les objectifs de la leçon. Un élément important de ces sections concerne la prise en compte de la dimension genre et des élèves HDA (handicap et difficultés d'apprentissage) en anticipant des actions. Dans le choix des activités et des situations qui alimenteront la fiche, il faut prendre en compte la dimension du genre.
- **La section 10** est consacrée aux **anticipations**. Dans les rubriques qui composent cette section, il s'agit d'anticiper les obstacles, les difficultés et les erreurs et, par la suite, planifier les actions à mener pour y remédier, comme l'indiquent les sous-rubriques « anticipation » et « action ». Les actions servent à planifier les processus de remédiation au regard des erreurs anticipées. Les remédiations peuvent être immédiates ou différées.
- **La section 11** concerne le **déroulement.** Elle est composée de quatre phases. Ce sont les phases qui structurent le déroulement d'une séance :

  1. Phase de mise en situation ou de préparation.
  2. Phase de réalisation.
  3. Phase d'objectivation/réinvestissement.
  4. Phase d'évaluation.

  La phase de mise en situation ou de préparation comporte un rappel de connaissances qui se réduit souvent à un contrôle des prérequis et à une activité déclenchante. Elle permet d'amener l'élève à cerner la nécessité d'apprendre un nouveau savoir et l'enseignant à introduire une nouvelle notion. La phase de réalisation comporte des activités qui amènent les élèves à construire de nouveaux savoirs. Cette phase comporte les énoncés des tâches proposées avec des exemples de traitements possibles (en termes d'anticipation) qui permettent à l'élève d'apprendre une nouvelle notion. Il s'agit de dévoluer le problème afin de créer une situation a-didactique. La phase d'objectivation/réinvestissement vise à réinvestir les savoirs construits dans une nouvelle tâche proposée aux élèves. Enfin la phase d'évaluation vise à évaluer ce qui a été enseigné.

  Pour chacune des phases, les activités de l'élève et celles de l'enseignant (consigne, aides possibles, exposé du savoir en jeu) sont positionnées, y compris celles de remédiation. Les activités de l'enseignant concernent aussi les actions de l'enseignant dans le processus de remédiation au regard des erreurs anticipées. Les remédiations peuvent être immédiates ou différées. Enfin, le contenu d'apprentissage est mis en évidence lors de la phase d'institutionnalisation.
- **La section 12** propose des **exercices d'approfondissement** à effectuer séance tenante et des exercices de travail à la maison.

- **Une dernière section en deux parties, la section 13, « bilan de la séance »,** est intégrée à la fiche afin d'amener l'enseignant à porter un regard réflexif post-séance (côté savoir, côté élève, côté enseignant), après l'utilisation de la fiche en classe une fois la séance réalisée (analyse à posteriori). La première partie fait un bilan global en mettant en évidence des éléments de synthèse, les notes théoriques ou d'institutionnalisation et les remédiations effectuées. La deuxième partie comporte des rubriques qui sont des retours réflexifs (côté savoir, côté élève, côté enseignant) sur la leçon au regard des obstacles/difficultés/erreurs rencontrés en lien avec le savoir en jeu lors de l'exécution de chaque tâche à chaque phase.

3.2.2 Format d'une fiche pédagogique d'une séance ou d'une séquence

- **Fiche n° :** .... ou **séquence n° :** ....
- **Établissement :** ....
- **Thème/concept :** ....
- **Sous-thème/chapitre** ou **sous-concept/chapitre :** ....
- **Leçon n°** ou **séance n° :** ....
- **Classe :** .... **Effectif des élèves :** .... **Date :** ....
- **Durée :** ....

Suite de la fiche pédagogique en page suivante ▸

❶ L'ANALYSE À PRIORI *(sections 1 à 10)*

1. **Intentions de l'enseignant : quelles sont les intentions didactiques de l'enseignant ?**

   Exemple L'intention de l'enseignant est d'apprendre aux élèves ce qu'est l'addition des fractions et comment additionner des fractions.

2. **Justification de la leçon** (au regard du programme ou des savoirs)

   Exemple Il s'agit de renforcer et de généraliser chez les élèves la maîtrise de l'addition des fractions et comment additionner des fractions.

3. **Objectifs visés en termes d'apprentissage**

   Exemple L'objectif visé est qu'à la fin de la leçon les élèves sachent additionner des fractions particulières.

4. **Objets d'apprentissage**

   Exemple Somme de fractions de dénominateurs différents.

5. **Prérequis et préalables**

   Exemple Multiples de deux nombres entiers naturels.

6. **Ressources** (matériels didactiques)

   Exemple 1 Matériel individuel.

   Exemple 2 Matériel collectif (kits et instruments de géométrie, calculatrices, cartes, globes, logiciels, documentaires).

   Exemple 3 Diverses ressources bibliographiques ou webographiques (livres, fichiers électroniques).

7. **Stratégies d'enseignement**

   Exemple 1 Travail individuel.

   Exemple 2 Travail en petits groupes.

8. Prise en compte des dimensions genre/inclusivité/différence

Exemple 1 Proposer des problèmes qui prennent en compte des noms de filles et de garçons.

Exemple 2 Former des groupes de travail mixte.

9. Références

Diverses références bibliographiques ou webographiques (conseils, notes historiques, textes, revues, livres) pour des prolongements.

10. Anticipation

10.1. Obstacles possibles mathématiques ou didactiques au regard de l'analyse conceptuelle et des ressources développées

Obstacles anticipés	Actions (processus de remédiation)

10.2. Difficultés possibles mathématiques ou didactiques au regard de l'analyse conceptuelle et des ressources développées

Difficultés anticipées	Actions (processus de remédiation)

10.3. Erreurs possibles mathématiques au regard de l'analyse conceptuelle et des ressources développées

Erreurs anticipées	Actions (processus de remédiation)

❷ PENDANT ET APRÈS LA CLASSE *(sections 11 à 13)*

11. Déroulement [2]

Étape 1 **Phase de mise en situation**

- Contrôle des prérequis
- Situation déclenchante

Durée : ....

Type et contenu des tâches	Activités attendues
Tâches et activités d'enseignement/ apprentissage au regard de l'analyse conceptuelle et des ressources développées	Activité du professeur et processus de remédiation Activité mathématique de l'élève
Contenus d'apprentissage	

Étape 2 **Phase de réalisation**

- Activités
- Synthèses

Durée : ....

Type et contenu des tâches	Activités attendues
Tâches et activités d'enseignement / apprentissage au regard de l'analyse conceptuelle et des ressources développées	Activité du professeur et processus de remédiation Activité mathématique de l'élève
Contenus d'apprentissage	

2 La première colonne sert à mettre en évidence les éléments qui structurent les étapes (tâches et activités…). La deuxième sert à mettre en évidence explicitement les activités attendues des élèves et de l'enseignant et les contenus, soit à expliciter ce qui est attendu.

Le tableau (point 1 à 13) est une fiche de préparation d'une leçon. Nous faisons une première présentation de la fiche qui servira d'outil lors de la préparation d'une leçon. En effet, il existe plusieurs variantes de fiche. Les auteurs présentent et proposent une fiche qui s'articule autour des contenus didactiques qui visent le renforcement des compétences des enseignants.

Étape 3 **Phase d'objectivation/réinvestissement**

- Renforcement
- Intégration
- Conclusion

Durée : ....

Type et contenu des tâches	Activités attendues
Tâches et activités d'enseignement/ apprentissage au regard de l'analyse conceptuelle et des ressources développées	▸ Activité du professeur et processus de remédiation ▸ Activité mathématique de l'élève
Contenus d'apprentissage	

Étape 4 **Phase d'évaluation**

Durée : ....

Type et contenu des tâches	Activités attendues
Tâches et activités d'enseignement/ apprentissage au regard de l'analyse conceptuelle et des ressources développées	▸ Activité du professeur et processus de remédiation ▸ Activité mathématique de l'élève
Contenus d'apprentissage évalué	

12. Exercices d'approfondissement

Type et contenu des tâches	Activités attendues
Exercices séance tenante	▸ Activité du professeur et processus de remédiation ▸ Activité mathématique de l'élève
Contenus d'apprentissage	

Type et contenu des tâches	Activités attendues
Exercices à la maison pour travaux dirigés ultérieurs (application, consolidation des acquis méthodologiques, approfondissement, recherche, projet)	‣ Activité du professeur et processus de remédiation ‣ Activité mathématique de l'élève
Contenus d'apprentissage	

13. Bilan de la séance

- Bilan de l'enseignant :
- Éléments de synthèse, notes théoriques ou d'institutionnalisation :
- Remédiations effectuées :

13.1 Côté savoir : obstacles/difficultés/erreurs rencontrés en lien avec le savoir en jeu lors de l'exécution de chaque activité à chaque phase

Étape 1 **Phase de mise en situation**

- Obstacles :
- Difficultés :
- Erreurs :

Étape 2 **Phase de réalisation**

- Obstacles :
- Difficultés :
- Erreurs :

Étape 3 **Phase d'objectivation/réinvestissement**

- Obstacles :
- Difficultés :
- Erreurs :

Étape 4 **Phase d'évaluation**

- Obstacles :
- Difficultés :
- Erreurs :

13.2 Côté élèves : obstacles/difficultés/erreurs rencontrés par les élèves lors de l'exécution de chaque activité à chaque phase

Étape 1 **Phase de mise en situation**

- Obstacles :
- Difficultés :
- Erreurs :

Étape 2 **Phase de réalisation**

- Obstacles :
- Difficultés :
- Erreurs :

Étape 3 **Phase d'objectivation/réinvestissement**

- Obstacles :
- Difficultés :
- Erreurs :

Étape 4 **Phase d'évaluation**

- Obstacles :
- Difficultés :
- Erreurs :

13.3 Côté enseignant : obstacles/difficultés/erreurs rencontrés par l'enseignant lors de l'exécution de chaque activité à chaque phase

Étape 1 **Phase de mise en situation**

- Obstacles :
- Difficultés :
- Erreurs :

Étape 2 **Phase de réalisation**

- Obstacles :
- Difficultés :
- Erreurs :

Étape 3 **Phase d'objectivation/réinvestissement**

- Obstacles :
- Difficultés :
- Erreurs :

Étape 4 **Phase d'évaluation**

- Obstacles :
- Difficultés :
- Erreurs :

3.2.3 Autoévaluation des ressources et de la fiche pédagogique au regard des ressources développées

1. Quelles sont **explicitement** les situations signifiantes évoquées dans la grille d'analyse conceptuelle qui sont prises en compte dans la réalisation de la fiche ? Justifiez.
2. Quelles sont **explicitement** les techniques et propriétés évoquées dans la grille d'analyse conceptuelle qui sont prises en compte dans la réalisation de la fiche et qui sont des objets ou des outils d'enseignement. Justifiez.
3. Quelles sont **explicitement** les formes langagières et non langagières évoquées dans la grille d'analyse conceptuelle qui sont prises en compte dans la réalisation de la fiche ? Justifiez.
4. Quels sont **explicitement** les obstacles évoqués dans la grille d'analyse conceptuelle qui sont pris en compte dans la réalisation de la fiche ? Justifiez.
5. Quelles sont **explicitement** les difficultés évoquées dans la grille d'analyse conceptuelle qui sont prises en compte dans la réalisation de la fiche ? Justifiez.
6. Quelles sont **explicitement** les erreurs évoquées dans la grille d'analyse conceptuelle qui sont prises en compte dans la réalisation de la fiche? Justifiez.

Le lecteur trouvera au chapitre 4 deux exemples de mise en œuvre de l'outil ci-dessus relatif à l'enseignement des fractions et à celui de la numération.

3.2.4 Avertissement aux formateurs

Les exemples du Tchad et du Congo n'ont pas été faits avec la fiche pédagogique innovante, contrairement à la fiche du Togo sur l'addition des fractions. Au Congo (fiche sur la numération), c'est la fiche pédagogique en vigueur qui a été utilisée, avec l'intégration de la dimension « difficulté et remédiation », lisible à la fin de la fiche. Tandis qu'au Tchad (fiche sur l'enseignement des fractions), c'est l'une des premières versions de la fiche pédagogique innovante qui a servi de référence. C'est dire que la fiche pédagogique innovante (dans sa version ultime avec la fiche sur l'addition des fractions en 5^{e}) a évolué au cours des différents ateliers. Dans chaque pays, on peut ainsi partir de sa propre fiche pédagogique et l'adapter, comme nous l'avions déjà souligné, ce qui laisse une certaine marge de manœuvre aux enseignants qui désireraient aller dans ce sens. Dans tous les cas, nous suggérons, en contexte de formation, d'utiliser la fiche pédagogique innovante pour donner du sens aux éléments conceptuels et outils didactiques.

4 ACTIVITÉS : DES EXEMPLES S'ADRESSANT AUX FORMATEURS EN VUE D'UN TRANSFERT EN FORMATION

Nous donnons ici des situations exemplifiées qui ont été proposées aux formateurs des ateliers, mais qui peuvent être, pour certaines (les jeux notamment), adaptées pour l'enseignement à des élèves.

4.1 Des activités sous forme de jeu à usage didactique

Des activités sous forme de jeu à usage didactique alimentent les formations et donnent un autre visage aux mathématiques. Elles visent le développement de l'esprit de créativité dans divers domaines des mathématiques. Elles permettent de comprendre certains concepts et les enjeux de leur enseignement par les enseignants et donnent à ces derniers des pistes pour aborder certaines leçons de façon pertinente. Elles donnent l'occasion de débattre sur les contenus mathématiques. Ces activités intéressantes, ludiques et motivantes sous forme de jeu permettent d'aborder des questions de sens, de résolution de problème ou de maîtrise de concept. Elles permettent ainsi de « jouer et d'apprendre en même temps » (Pelay, 2009, 2011).

Le but de ces activités est aussi d'être adaptées et intégrées dans les fiches pédagogiques. Elles pourraient contribuer, de façon ludique, à rompre avec la « mathophobie », la peur des mathématiques, et à éprouver du plaisir à faire des mathématiques, tout en apprenant de nouvelles manières de les faire ou de les faire faire aux apprenants. Elles permettent aussi de rompre avec certaines activités (classiques), de type papier-crayon, qui sont proposées dans les fiches pédagogiques par certains enseignants. En ce sens, les jeux à usage didactique aident au développement et au renforcement de certaines capacités et compétences pédagogiques et didactiques. Plusieurs compétences disciplinaires et interdisciplinaires sont visées. Sont mobilisés la recherche, le raisonnement, la créativité, la compréhension, la communication, l'esprit critique, la découverte en enseignement des mathématiques, mais également, comme le souligne Toninato (2019), les jeux à usage didactique revêtent « des aspects motivationnels et coopératifs ». Le jeu à usage didactique permet de faire travailler les mathématiques « avec plaisir en permettant une très importante dévolution » (Zarpas et Gardes, 2019).

Pour illustrer les propos, nous mettons en évidence la consigne générale qui accompagne ces jeux à usage didactique et décrivons quelques activités.

4.1.1 Consigne pour ce type d'activité

« *Consigne - Atelier d'exploration dans divers domaines mathématiques*

Vous intervenez dans le cadre d'une formation initiale ou d'une formation continue des enseignants. Vous mettez à la disposition de ces enseignants des activités proposées dans ce document.

1. Réalisez les activités proposées.
2. À quoi vous attendez-vous ou à quoi le formateur à l'enseignement des mathématiques que vous êtes s'attend pour enrichir la pratique de ses enseignants ?
3. Dans le cadre de la formation (programme APPRENDRE), nous allons concevoir des fiches pédagogiques (séances de classes ou séances d'enseignement) et d'autres ressources. Quels usages feriez-vous des expériences issues de cette activité d'exploration ? Ces activités et les expériences vécues en les faisant pourraient-elles contribuer à l'élaboration de séances de classes ou de séances d'enseignement ? »

4.1.2 Exemples d'activités

Activité 1 **Le casse-tête des fractions**

Cette activité consiste à recomposer des figures géométriques spécifiques, à l'aide de pièces découpées (composant les figures géométriques) sur lesquelles sont inscrites des proportions ou des fractions des figures géométriques initiales, après avoir observé quelques secondes les figures géométriques initiales. Deux dimensions (géométrique et numérique) pour recomposer les figures géométriques sont mises en jeu. Ce jeu permet aussi d'additionner les fractions en donnant du sens.

Activité 2 **La comparaison des fractions**

Ce jeu vise à classer les fractions $\frac{7}{8}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{6}$ de manière croissante. Le but de cette activité est de ranger ces fractions sans utiliser la technique faisant appel au dénominateur commun.

Activité 3 **Dites-le avec des fleurs**

Dans cette activité, il s'agit de trouver le coût d'un bouquet de fleurs en connaissant ceux de trois bouquets. Cet exercice suscite beaucoup de curiosité. La tendance majoritaire est d'utiliser la technique consistant à mettre en équation et résoudre le système d'équations pour trouver la réponse, alors que ce n'est pas nécessaire. De plus, ce problème peut être proposé aux élèves du primaire.

Activité 4 Les développements du cube

Dans cette activité, il s'agit de trouver d'autres développements du cube en dehors de celui qui a été présenté (le patron du cube en croix) et qui est enseigné systématiquement aux élèves. Certains participants ignorent qu'il existe onze types de patrons du cube. Cette activité pourrait être prolongée pour trouver les 54 patrons du pavé droit. Ce jeu permet de développer des habiletés propres à la visualisation spatiale, car il implique des opérations mentales, des manipulations, des transformations sur des objets en 2D ou 3D (Barisnikov et Pizzo, 2007). Ce jeu invite enfin les participants à permettre aux élèves de développer le sens spatial en géométrie par la résolution de ce type d'activité.

Activité 5 Du plus petit au plus grand

Il s'agit d'une activité de créativité, tirée du mémoire de maîtrise de Koudogbo Adihou (2002) soutenu à l'Université de Genève (Suisse). Sur cinq cas de difficultés graduelles, il s'agit de compléter des étiquettes avec des chiffres manquants (1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5) dans une série de 5 items pour que les nombres obtenus soient ordonnés du plus petit au plus grand.

Activité 6 Jeu Champion

Dans cette activité de créativité qui provient également du mémoire de maîtrise de Koudogbo Adihou (2002) soutenu à l'Université de Genève (Suisse), les participants sont invités deux à deux à jouer en choisissant, à tour de rôle, des cartes. Sur chaque carte est inscrit l'un des dix chiffres de 0 à 9. Le but est de former des nombres à trois chiffres en les inscrivant dans un plan de jeu constitué de 3 cases. Le gagnant est celui qui a formé le plus grand nombre. C'est un jeu très intéressant qui vise à travailler entre autres la numération de position décimale et la comparaison de nombres. En effet, le fait d'attribuer une place à chaque chiffre renvoie au principe de position décimale. Chaque chiffre dans l'une des cases correspond à une position. Cette position fait sa valeur et n'est pas indiquée tant que les 3 chiffres du nombre ne sont pas écrits. Les joueurs doivent former un nombre de 3 chiffres, mais également faire une comparaison de 2 nombres afin de déterminer lequel est le plus grand.

À travers ce jeu, on veut apprendre aux élèves la numération de position décimale, tout en développant d'autres habiletés et compétences liées au jeu. Cette activité a permis de mettre en évidence l'importance de la dévolution dans l'enseignement/apprentissage des mathématiques. En effet, le joueur doit s'approprier la situation : le jeu doit devenir l'affaire du joueur. Chaque joueur doit s'impliquer dans la recherche de stratégies gagnantes, à partir des 10 chiffres, pour former le nombre le plus grand en tirant successivement 3 chiffres.

Les savoirs en jeu sont : la construction du concept du nombre, l’écriture, la lecture, le classement, la comparaison, la composition et la décomposition des nombres, ainsi que celle du concept de la numération de position décimale dont les principes de position et décimal (Koudogbo, 2013, 2017, 2021). Les différents types de stratégies gagnantes sont : placer les grands chiffres dans la case de gauche, être le premier à jouer. Placer zéro ou un petit chiffre dans la case de gauche fait partie des stratégies perdantes.

Considérant l’attrait des participants pour ce jeu lors des ateliers, où les notions mathématiques ne sont pas toujours suffisamment repérées, outre le principe positionnel, nous apportons un peu plus de détail pour révéler les stratégies expertes liées à la richesse conceptuelle et l’apport indéniable de ce jeu d’une part, et les adaptations possibles dont il pourrait faire l’objet à partir du jeu sur différentes variables didactiques, puis réutilisées à des fins de formations d’autre part.

- **Stratégies expertes**

  Le problème consiste à prendre une décision sur la position du 1^er^ chiffre tiré en tenant compte de sa valeur. Ainsi, dans le plan de jeu, l’inscription des chiffres peut se faire de différentes façons :

  ➜ les cartes numérotées de 0 à 3 à droite (case des unités) ;
  ➜ les cartes 6 à 9 à gauche (case des centaines) ;
  ➜ les cartes 3, 4, 5 et 6 au milieu (case des dizaines).

  Supposons que l’un des joueurs a écrit « abc » et l’autre joueur « a’b’c’ ». À la fin de la partie, pour décider qui a gagné, il faut comparer « abc » et « a’b’c’ ». Si a > a’, abc > a’b’c’, les joueurs doivent anticiper la comparaison 100a + 10b + c et 100a’ + 10b’ + c’, donc comprendre les principes de position et décimal, notamment la valeur de position.

  Pour gagner, il leur faudra trouver, à partir des chiffres tirés, tous les arrangements possibles de 3 chiffres pour décider dans quelle case il leur faut écrire tel chiffre, sachant qu’on ignore le chiffre de la carte suivante à tirer, et que les chiffres sont tous différents et ne peuvent être tirés qu’une et une seule fois.

  En outre, d’autres stratégies gagnantes intègrent les éléments suivants :

  - Les actions de l’autre joueur selon le chiffre tiré et sa position dans le plan du jeu.
  - Les deux extrêmes : tirer la carte ayant le chiffre 9 et l’inscrire à la place des centaines permet toujours de gagner et tirer la carte avec le chiffre 0 et l’inscrire à la position des centaines conduit toujours à une perte.
  - Décider de l’arrêt du jeu si les joueurs ont écrit un chiffre différent dans la case des centaines.
  - Décider de cacher le plan de jeu à son adversaire et vice versa.

- Tirer parti des erreurs de l'autre joueur.
- Anticiper sur les chiffres restants à tirer : plus grands/plus petits que ceux déjà tirés ?
- Anticiper que chaque chiffre ne peut pas être égal au précédent déjà tiré.

- **Stratégies perdantes**
  - Ne pas tenir compte des principes de position ou du principe décimal du concept en jeu.
    - Par exemple, tirer la carte où est marqué le chiffre 0 et l'écrire dans la case des centaines entraîne toujours une perte. Le nombre ainsi formé, bien qu'ayant trois chiffres (par obligation d'écrire toujours le chiffre indiqué sur la carte tirée) ne représente qu'un nombre à deux chiffres. Car le 0 au début d'un nombre équivaut à une absence de groupement à la position des centaines. Le nombre formé sera toujours inférieur à l'autre. La comparaison est également évidente dans ce cas.
    - Même si le joueur ne maîtrise pas la numération de position décimale, il sait par intuition que « plus il y a de chiffres dans un nombre, plus ce nombre est grand » (De Blois, 1996 ; Koudogbo, 2013, 2017 ; Koudogbo, Giroux et René-de-Cotret, 2017).
  - Écrire les chiffres au hasard.
  - Écrire de gauche à droite les chiffres tirés (dans le sens de l'écriture), ce qui revient à une écriture au hasard « contrôlée » par cette règle *ad hoc*.
  - Faire des erreurs en rapport avec la valeur de position des nombres dans la comparaison des deux nombres formés par les joueurs.
  - Prendre le jeu Champion comme n'importe quel jeu et ne pas percevoir l'enjeu mathématique. Ainsi, le gain ou la perte sera attribué à un coup de chance ou de malchance.

- **Adaptations possibles : jeu sur des variables didactiques**

  Différentes variables didactiques numériques ou non numériques pertinentes peuvent être utilisées, ce qui, subséquemment, modifie les stratégies des joueurs selon les visées du jeu :

  - Il est possible de jouer sur la grandeur des nombres : en accroissant la taille des nombres, on augmente le nombre de cases. Par exemple, au lieu de 3 cases, dans ce jeu-ci, proposer des nombres de l'ordre des milliers (4 cases), des dizaines de milliers (5 cases), etc.
  - La taille des nombres et le nombre de cases influencent le nombre de cartes à utiliser : doubler ou tripler le nombre de cartes de jeu (10-20-30).

Des variables contextuelles peuvent être introduites en lien avec les contraintes (règles) du jeu et modalités du jeu :

- Remettre des cartes déjà tirées dans le jeu pour les tirer à nouveau.
- Possibilité d'effacer à la fin de la partie un chiffre déjà inscrit dans l'une des cases (permet de procéder à posteriori à la comparaison des nombres (joueur/adversaire).
- Travail en équipe : nombre de joueurs (deux ou trois) ; hétérogénéité.

- **Quelques constats et retombées en matière de formation**

Notons que les réactions des participants sont plus mitigées quand il s'est agi de répondre aux questions : déterminer les savoirs en jeu ; les compétences visées par le jeu ; les différents types de stratégies que peuvent mettre en œuvre les élèves ; les difficultés que les élèves peuvent rencontrer.

Dans ces activités, il est aussi question d'anticiper les difficultés (mathématiques et didactiques) possibles de l'élève, ainsi que celles qu'un enseignant pourrait rencontrer dans leur mise en œuvre dans sa classe. Il s'agit aussi de savoir comment remédier à ces difficultés.

L'objectif poursuivi en recourant à ces jeux dans la formation est de sortir les enseignants des sentiers battus et de les amener à proposer des activités mathématiques riches autres que les petits exercices. Ces éléments sont importants pour mieux cerner les causes et les sources des erreurs et des difficultés des élèves, et porter un regard analytique sur ces erreurs afin de mieux intervenir auprès des élèves. C'est aussi important pour mettre en place des activités de remédiation riches et *a fortiori* renouveler les pratiques.

Activité 7 « Qui dira 20 ? »

C'est une activité qui a été travaillée par Brousseau (1998a) et reprise par plusieurs didacticiens des mathématiques. À l'origine, cette activité ludique vise à « introduire une révision de la division (dans des circonstances où le "sens de l'opération" n'était pas conforme aux apprentissages antérieurs) et de favoriser la découverte et la démonstration, par les enfants, d'une suite de théorèmes. [...] Il s'agit, pour chacun des adversaires, de réussir à dire "20" en ajoutant 1 ou 2 au nombre dit par l'autre ; l'un commence, dit 1 ou 2 (exemple : 1), l'autre continue, ajoute 1 ou 2 à ce nombre (2 par exemple) et dit "3" ; à son tour le premier ajoute 1 ou 2 (1 par exemple), il dit 4, etc. » (Brousseau, 1998b, p. 25).

Nous reprenons dans les lignes qui suivent, une présentation de cette même activité intégrant certaines stratégies et une progression visant la généralisation en nous référant aux travaux de Bessot (2004) :

Course à 20 et règles du jeu

Le jeu comporte deux adversaires qui disent un nombre tour à tour.

Il s'agit pour chacun des adversaires de réussir à dire « 20 » le premier.

Le premier qui joue a le droit de dire « 1 » ou « 2 ». On ne peut dire un nombre que s'il s'obtient en ajoutant 1 ou 2 au nombre que l'adversaire vient de dire.

Faire quelques parties et formuler une stratégie gagnante (c'est-à-dire qui permette de gagner quoi que fasse l'adversaire).

Commentaires :

Gagne celui qui joue le premier en disant « 2 », puis 5, 8, 11, 14, 17, 20 (qu'il peut dire quoique dise l'adversaire).

Très vite on « sait » que celui qui dit « 17 » a gagné : la course à 20 devient la course à 17. On peut donc réitérer le raisonnement. En fait la suite gagnante se trouve « en descendant » : 20, 17, 14, etc.

Course à *n* et règles du jeu

Le jeu comporte deux adversaires qui disent un nombre tour à tour. Il s'agit pour chacun des adversaires de réussir à dire « n » le premier.

Le premier qui joue a le droit de dire un entier non nul inférieur à p. On ne peut dire un nombre que s'il s'obtient en ajoutant un entier non nul inférieur à p au nombre que l'adversaire vient de dire. [n et p sont des entiers naturels avec $n > p$].

Commentaires :

Cette situation engendre plusieurs jeux en attribuant aux variables n et p des valeurs particulières.

Quel savoir mathématique fournit un outil de résolution économique et optimal pour les jeux de la course à n ? ⇒ La division euclidienne de n par l'entier $(p + 1)$: $n = (p + 1) \times q + r$ avec $0 \leq r \leq (p + 1)$

Le « sens » de cette division (dans les jeux de la course à n) est la soustraction réitérée de $(p + 1)$ à n : le nombre de soustractions réitérées pour arriver au plus petit entier est le quotient de cette division, le plus petit entier auquel on arrive est le reste. Le nombre $(p + 1)$ que l'on soustrait de façon réitérée est le diviseur.

4.2 Un exemple de situation de transposition[3] : le jeu Concertum

Le but de ce jeu est de travailler les notions de situation didactique (dialectique de l'action, formulation et validation) et a-didactique, de variable didactique et l'activité du professeur (processus de dévolution et d'institutionnalisation notamment).

La situation mathématique (jeu par équipe de n joueurs) :

Les n joueurs disposent sur leur table 10 cartes numérotées de 0 à 9. L'animateur du jeu énonce un nombre entier N. Les joueurs doivent dans les 15 secondes qui suivent lever chacun une carte, sans se concerter et sans regarder ce que lèvent les autres joueurs.

L'équipe qui gagne est celle dont la somme des nombres figurant sur les cartes est le plus proche du nombre énoncé.

La consigne donnée aux participants est la suivante : « Voulez-vous simuler le jeu par exemple sur deux essais successifs particuliers puis réfléchir à une stratégie gagnante ? Vous pouvez aussi passer directement à l'analyse mathématique du jeu. Il vous faut résoudre le problème d'un point de vue mathématique et d'un point de vue didactique (connaissances mathématiques et didactiques potentiellement mises en jeu). Envisager un scénario pour des formateurs visant la mobilisation de ces connaissances de différents types. »

Il existe deux stratégies gagnantes dont la prise de conscience est très souvent liée au nombre de joueurs des équipes.

Si N est le nombre cible et si n est le nombre de joueurs :

➜ **Stratégie 1 :**

- Si $N > 9n$, tous les joueurs lèvent 9.
- Si $N < 9n$ alors si on divise N par n on a : $N = nq + r$ avec $0 < r < n$
- Donc $(n - r)$ joueurs lèvent q et r joueurs lèvent $q + 1$
- Vérification : $(n - r) \times q + r(q + 1) = nq - rq + rq + r = nq + r = N$

➜ **Stratégie 2 :**

- Si $N > 9n$, tous les joueurs lèvent 9.
- Si $N < 9n$ alors on divise N par 9 on a : $N = 9q + r$ avec $0 < r < 9$
- Donc : q joueurs lèvent 9, un joueur lève r et les $(n - q - 1)$ autres joueurs lèvent 0.

3 Voir chapitre 1.

Plusieurs scenarii peuvent être mis en place avec pour objectifs de présenter une situation se modélisant par une division euclidienne et de penser ou d'analyser un scénario en termes de situations didactiques et a-didactiques (simulation de situations a-didactiques et didactiques, dialectique action/formulation/validation).

Exemple d'étapes d'un scénario jouant sur les variables de la situation (nombres de joueurs, taille du nombre cible, dialectique entre action, formulation et validation) :

1. Étape 1 : énoncé de la règle du jeu et prescription de la tâche (2 essais avec inscription des résultats au tableau), jeu par équipe de 4 ou 5, puis concertation par équipe.
2. Étape 2 : faire écrire les stratégies mises en œuvre puis tester ces stratégies en gardant un nombre de joueurs.
3. Étape 3 : faire évoluer les stratégies en jouant et en augmentant progressivement le nombre de joueurs dans l'équipe 4, 7, 11, 17, 24, tout le groupe.

Généralisation : trouver une stratégie gagnante dans le cas général, institutionnalisation mathématique et didactique (typologie des situations). Selon le niveau mathématique des formés, différentes stratégies sont possibles.

Nous renvoyons le lecteur pour une analyse détaillée à Butlen, D. et Péault, H. (2003). La division en formation initiale. Coprirelem, Arpeme, *Concertum, 10 ans de formation des professeurs des écoles en mathématiques* (pp. 277-305), tome 2, chapitre 3. http://www.arpeme.fr/documents/4550F1F8545AFD6641A8.pdf

5 BIBLIOGRAPHIE

Artigue, M. et **Douady, R.** (1986). La didactique des mathématiques en France. *Revue française de pédagogie*, *76*, 69-88.

— (1988). Ingénierie didactique en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *9*(3), 281-308.

Assude T., **Mercier, A.** et **Sensevy, G.** (2007). L'action didactique du professeur dans la dynamique des milieux. *Recherche en didactique des mathématiques*, *27*(2), 221-242.

Bessot, A. (2004). Une introduction à la théorie des situations didactiques (Master « Mathématiques, Informatique » de Grenoble 2003-2004). *Les cahiers du Laboratoire Leibniz*, *91*, 17-19.

Brousseau, G. (1982a). Les objets de la didactique des mathématiques. *Actes de la deuxième école d'été de didactique des mathématiques*, IREM d'Orléans.

— (1982b). D'un problème à l'étude a priori d'une situation didactique. *Actes de la deuxième école d'été de didactique des mathématiques.* IREM d'Orléans, 39-60.

— (1986a). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *7*(2), 33-115.

— (1986b). Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques [thèse de doctorat d'État ès sciences]. Université Sciences et Technologies – Bordeaux 1.

— (1988a). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques*, *9*(3), 309–336.

— (1988b). Les différents rôles du maître. *Bulletin de l'A.M.Q.*, *23*, 14-24.

— (1988c). Didactique fondamentale : cadre et objets de la didactique. *Actes de l'université d'été d'Olivet « Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire »*.

— (1998a). *La théorie des situations didactiques. Recueil de textes de Didactique des mathématiques 1970-1990, présentés par M. Cooper et N. Balacheff, Rosamund Sutherland et Virginia Warfield*. La Pensée sauvage.

— (1998b). Introduction : un exemple pour entrer en matière : « La course à 20 ». Dans G. Brousseau, *La théorie des situations didactiques. Recueil de textes de Didactique des mathématiques 1970-1990, présentés par M. Cooper et N. Balacheff, Rosamund Sutherland et Virginia Warfield*, La Pensée sauvage.

— (1998, 2010). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques*, rédigé en 1998 et mis à jour en 2010 et consultable en ligne : http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf

Butlen D. et **Peault, H.** (2003). La division en formation initiale. Copirelem, Apreme, *Concertum, 10 ans de formation des professeurs des écoles en mathématiques*, *Concertum. Carnets de route de la COPIRELEM* (pp. 277-305).

Charles-Pézard, M., **Butlen, D.** et **Masselot, P.** (2012). *Professeurs des écoles débutants en ZEP. Quelles pratiques ? Quelle formation ?.* La Pensée sauvage.

Charnay, R. (2003). L'analyse a priori, un outil pour l'enseignant. *Math-École*, *209*, 19-26.

— et **Mante, M.** (2016). *Mathématiques. Épreuve écrite d'admissibilité. Tome 2*. Hatier.

Deblois, L. (1996). Une analyse conceptuelle de la numération de position au primaire. *Recherches en didactique des mathématiques*, *16*(1), 71-127.

Dorier, J.-L. (2010). L'analyse a priori : un outil pour la formation d'enseignants - exemple d'un jeu issu des manuels suisses romands de première année primaire. Dans P. Danos (dir.), *L'enseignement des mathématiques à l'école : où est le problème - Actes du xxxvi*e *colloque international des formateurs de professeurs des écoles en mathématiques (COPIRELEM)*. ARPEME.

Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet* [thèse de doctorat]. Université Paris-Diderot.

— (1993). Enseignement de la dialectique outil-objet et des jeux de cadres en formation mathématique des professeurs d'école. Dans *Éclairages didactiques : Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques – Colmar 1993*. 189-200.

— et **Perrin-Glorian, M.-J.** (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 387-424. https://doi.org/10.1007/BF00315608

Duval, R. (1991). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *5*, 37-65.

— (1995). *Sémiosis et pensée humaine, Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berne : Peter Lang SA.

— (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matematica Educativa*, Número Especial, 45-81. Universidad Autóma del Estado de México.

Koudogbo Adihou, J. (2002). Approche du « didactique familial » à travers l'étude des mécanismes topogénétiques et chronogénétiques : deux études de cas [mémoire de maîtrise]. Université de Genève.

Koudogbo, J. (2013). *Portrait actuel des connaissances d'élèves de troisième année de l'ordre primaire et de situations d'enseignement sur la numération de position décimale* [thèse de doctorat en éducation], Université du Québec à Montréal.

— (2017). Decimal number system: Knowledge of Quebec students educated under the 2001/1981 programs and teaching situations. *Journal of Mathematics Education, Education for All*, *10*(1), 17-35.

— (2021). La recherche en didactique des mathématiques, un levier pour l'enseignement ? Vers une approche systémique pour développer le potentiel des élèves en difficulté. Dans P. Marchand, A. Adihou, J. Koudogbo, D. Gauthier et C. Bisson (dir.). *La recherche en didactique des mathématiques et les élèves en difficulté : quels enjeux et quelles perspectives ?* (pp. 53-76). Éditions JFD.

—, **Giroux, J.** et **René-de-Cotret, S.** (2017). La numération de position : où en sont les connaissances d'élèves québécois ? *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *17*(3), 199-218, https://doi.org/10.1080/14926156.2017.1299893.

—, **Theis, L.**, **Millon-Fauré, K.**, **Assude, T.**, **Tambone, J.**, **Morin, M.-P.** (2022). L'analyse a priori : un outil pour l'enseignant ? Un exemple avec les problèmes de partage à l'école élémentaire. *Revue Grand N*, *110*, 47- 68.

Pelay, N. (2009). Vers le concept de contrat didactique et ludique. Dans *Actes de la 15e école d'été de didactique des mathématiques*. Clermont-Ferrand.

— (2011). *Jeu et apprentissages mathématiques : élaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique* [thèse de doctorat], Université Lyon 1.

Perrin-Glorian, M.-J. et **Hersant, M.** (2003). Milieu et contrat didactique, Outils pour l'analyse de séquences ordinaires. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *23*(2), 217-276.

Robert, A. (2001a). Recherches sur les pratiques des enseignants de mathématiques du secondaire : imbrication du point de vue de l'apprentissage des élèves et du point de vue de l'exercice du métier d'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques*, *21*(1/2), 7-56.

— (2001b). Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier enseignant. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *21*(1/2), 57-80.

Rogalski, M. (2019). *Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et le jeu de cadres de Régine Douady*, Sorbonne Université.

Vendeira-Maréchal, C. (2012). Ce que l'analyse a priori peut révéler des pratiques enseignantes. *Grand N*, *89*, 103-129.

Zarpas, P., et **Gardes, M.-L.** (2019). Un jeu vidéo didactique pour l'apprentissage des fractions. *Revue de Mathématiques pour l'école (RMé) - Ex. Math-Ecole, 231*, 20-29. http://hdl.handle.net/20.500.12162/4066

CHAPITRE

4

DEUX EXEMPLES DE MISE EN ŒUVRE DES OUTILS DIDACTIQUES

1 INTRODUCTION

Deux exemples de mise en œuvre des outils didactiques présentés dans les chapitres 2 et 3 sont développés dans ce chapitre. Le premier a trait à l'enseignement des fractions à l'école primaire et au collège ; le second concerne l'enseignement de la numération.

2 À PROPOS DE L'ENSEIGNEMENT DES FRACTIONS À L'ÉCOLE PRIMAIRE ET AU COLLÈGE

Nous présentons ci-dessous, sur le thème de l'enseignement des fractions, des exemples d'analyse conceptuelle, de cartographie/continuum, de carte conceptuelle et de fiches pédagogiques. Ces outils ont fait l'objet d'un travail de productions de ressources lors de plusieurs ateliers (Bénin, Niger, Cameroun, Congo, Tchad, Togo notamment). Les documents que nous proposons sont issus de ces productions. Ils ont été rédigés en prenant en compte l'évolution constatée par les experts. Ils ont également été décontextualisés afin de permettre une diffusion plus large dépassant les contraintes spécifiques à chaque pays.

2.1 Un exemple d'analyse conceptuelle s'appuyant sur une grille conceptuelle (inspiré d'une production du Togo)

Questions spécifiques au concept pour guider l'analyse conceptuelle	Éléments de réponse
Quelles sont les situations, les activités signifiantes et pertinentes qui permettent l'enseignement et l'apprentissage de la notion ou du concept et qui induisent des activités mathématiques riches (la référence) ?	▸ Situations permettant de travailler les différents sens de la fraction. ▸ Activités de proportionnalité. ▸ Activités de partage équitable. ▸ Activités de proportion par rapport à tout. ▸ Activités de fractionnement et de mesure. ▸ Activités de statistique. ▸ Situations permettant de passer d'une forme d'écriture à une autre. ▸ Activité de réduction ou d'agrandissement. ▸ Opération de division d'un entier par un entier non nul.

Continue en page suivante ▸

Questions spécifiques au concept pour guider l'analyse conceptuelle	Éléments de réponse
Quel est spécifiquement le contenu mathématique concerné par les situations signifiantes et pertinentes ?	▸ Fractions équivalentes. ▸ Fractions décimales. ▸ Opérations sur les fractions. ▸ Simplification et amplification d'une fraction. ▸ Fractions irréductibles. ▸ Condition d'existence d'une fraction. ▸ Diverses représentations de la fraction.
Quelles ressources (matérielles ou autres) peuvent être utilisées pour exploiter les situations signifiantes et pertinentes ?	▸ Matériel mettant en évidence le modèle de longueur (graphique, droite diplômée, utilisation de ficelles). ▸ Matériel mettant en évidence le modèle de surface (gâteau, papier, quadrillage, pliage de papier). ▸ Matériel mettant en évidence des quantités discrètes (billes, perles, etc.). ▸ Manipulation de diverses figures géométriques. ▸ Manipulation de calculatrice. ▸ Logiciels de mathématiques.
Quelles difficultés ces ressources, ou toute autre variable didactique (par exemple les données numériques) choisie, peuvent-elles amener ?	▸ Taille de données choisies. ▸ Contraintes liées à la consigne. ▸ Écart entre les nombres. ▸ Difficulté à mettre en évidence les différents sens. ▸ Difficulté à mettre en évidence des fractions-relations[1]. ▸ Difficulté de lecture (mesure, opération).

1 La référence à la fraction-relation concerne le troisième niveau des trois niveaux de compréhension des fractions selon Desjardins et Hétu (1974) :

1er niveau (jusqu'à 7-8 ans, 2e année) : niveau des préfractions. Les élèves traitent les fractions comme des collections de morceaux sans lien spécifique avec l'entier. Ils ne peuvent coordonner les deux opérations suivantes : le partage égal de l'entier et la réunion des parties. De ce fait, deux erreurs apparaissent lors des activités de partition d'un tout : le partage inégal de l'entier et le non-épuisement du tout.

2e niveau (9-10 ans, 4e année) : niveau fraction-quantité. Les élèves sont capables de combiner les opérations de partage et de réunion. Ils sont capables par des manipulations de comprendre la relation équivalente entre ½ et ²⁄₄ pourvu que ces fractions proviennent d'un même tout. Ils peuvent aussi comparer deux fractions qui proviennent d'un même tout (ex. : ⅓ d'une surface donnée et ¼ de cette même surface). Toutefois, ils ne peuvent concevoir que le quart d'une pizza moyenne, par exemple, soit la même chose que le quart d'une grande pizza, car les quantités associées à la fraction ¼ ne sont pas identiques. La comparaison qui conduit à admettre l'égalité des parties constituées porte sur des quantités au lieu de porter sur les relations de parties à tout.

3e niveau (10-11 ans, 5e année) : niveau fraction-relation. Les élèves sont capables de comparer deux fractions tirées de deux entiers différents. Le progrès réalisé entre le niveau de la fraction-quantité et le niveau de la fraction-relation réside dans la possibilité qu'acquiert l'élève de ne plus comparer seulement des quantités déterminées par les partages, mais bien la possibilité de comparer les relations que chaque fraction entretient avec son entier. Les élèves pourront alors comparer le ¼ d'un grand rectangle et le ¼ d'un petit rectangle.

Questions spécifiques au concept pour guider l’analyse conceptuelle	Éléments de réponse
Quelles sont les techniques, procédures et approches que pourrait mettre en évidence l’élève et sur lesquelles reposerait l’opérationnalité des schèmes (le signifié) ?	▸ Développement des algorithmes ou des techniques de résolution d’activités impliquant les fractions. ▸ Utilisation du PGCD pour simplifier une fraction. ▸ Utilisation du PPCM pour mettre au même dénominateur deux ou plusieurs fractions. ▸ Procédure pour mettre en évidence des fractions-relations. ▸ Procédure pour illustrer les différentes opérations avec du matériel. ▸ Utilisation des cadres ou cadrans subdivisés.
Quels raisonnements mathématiques possibles l’élève peut-il mettre en évidence au regard de ces techniques, procédures et approches ?	▸ Déduction. ▸ Intuition. ▸ Analogie. ▸ Généralisation.
Quelles difficultés possibles peuvent être révélées chez l’élève au regard de ces techniques, procédures et approches ?	▸ Difficultés d’ordre procédurales. ▸ Difficultés au niveau de l’exécution des opérations. ▸ Difficultés d’ordre conceptuel (difficultés liées au sens d’une fraction). ▸ Difficultés liées aux fractions impropres. ▸ Difficultés issues des apprentissages antérieurs. ▸ Difficultés de comparaison des fractions. ▸ Difficultés en lien avec les fausses conceptions chez l’élève.
Quelles erreurs mathématiques possibles l’élève peut-il mettre en évidence au regard de ces techniques, procédures et approches ?	▸ Erreurs de non-compréhension des opérations. ▸ Erreurs de transformation impliquant des propriétés mathématiques. ▸ Erreurs d’amplification et de simplification. ▸ Erreurs de représentation d’une forme d’écriture et de passage d’une forme à l’autre. ▸ Erreurs de rangement dans un ordre (croissant ou décroissant).
Quelles pourraient être les causes possibles des difficultés que l’élève peut rencontrer et des erreurs mathématiques qu’il peut commettre au regard de ces techniques, procédures et approches ?	▸ Causes liées à l’enseignement reçu. ▸ Insuffisance des connaissances antérieures. ▸ Causes liées au développement de l’enfant. ▸ Causes d’ordre épistémologique. ▸ Causes liées à la démarche mise en œuvre. ▸ Causes liées à la lecture.

Continue en page suivante ▸

Questions spécifiques au concept pour guider l’analyse conceptuelle	Éléments de réponse
Quels sont les ajustements, les relances, c’est-à-dire les interventions possibles à apporter pour mieux adapter la situation ou l’activité au niveau des élèves ou au programme en vigueur ?	▸ Remédiation immédiate. ▸ Remédiation différée. ▸ Les relances et les interactions. ▸ Varier la nature des activités. ▸ Faire des reformulations. ▸ Le décodage des différentes désignations de la fraction peut être source de difficulté.
Quelles sont les anticipations mathématiques possibles que l’élève pourrait faire au regard de ces techniques, procédures et approches ?	▸ Faire des hypothèses. ▸ Faire appel à l’intuition. ▸ Modéliser les ressources antérieures (règles et propriétés). ▸ Estimation. ▸ Adapter le vocabulaire à l’activité.
Quels sont les liens que l’élève peut faire avec d’autres concepts mathématiques (vus ou non) au regard des techniques, procédures et approches, en lien avec le concept à l’étude ?	▸ Lien avec la proportionnalité (débit, vitesse, pourcentage, échelle). ▸ Lien avec les fractions décimales. ▸ Lien avec la probabilité, les fréquences. ▸ Lien avec la règle de trois. ▸ Lien avec le PGCD pour simplifier une fraction. ▸ Lien avec le PPCM pour mettre au même dénominateur. ▸ Lien avec les formes semi-circulaires.
Quelles sont les fausses conceptions que l’élève pourrait avoir en lien avec le concept à l’étude ?	▸ Fraction toujours plus petite que 1. ▸ Le numérateur d’une fraction est toujours 1. ▸ Additionner deux fractions, c’est additionner les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux. ▸ Une fraction est un couple de deux nombres. ▸ Les nombres entiers (respectivement les décimaux) ne sont pas des fractions. ▸ On peut diviser un nombre par zéro.
Quelles sont les formes langagières qui permettent de verbaliser les propriétés, les situations et les procédures de traitement mathématiques en lien avec le concept à l’étude (le signifiant) ?	▸ Vocabulaire approprié aux fractions : partager, diviser, multiplier, comparer, classer, ordonner, le quotient, le numérateur, le dénominateur, les fractions unitaires. ▸ Dénomination de certaines fractions : demi, tiers, quart, etc.

Questions spécifiques au concept pour guider l'analyse conceptuelle	Éléments de réponse
Quelles sont les formes non langagières qui permettent de représenter symboliquement les propriétés, les situations et les procédures de traitement en lien avec le concept à l'étude (le signifiant) ?	▸ Les symboles. ▸ Les représentations symboliques. ▸ Les représentations picturales (dessin). ▸ Les représentations sous forme de segment.
Quelles sont les formes langagières ou non langagières qui pourraient être source de difficultés pour l'élève (le signifiant) ?	▸ Représentations graphiques d'une fraction impropre. ▸ Dénomination de certaines fractions : demi, tiers, quart, les fractions unitaires. ▸ La verbalisation. ▸ Écriture d'une fraction en pourcentage. ▸ Réécriture d'une fraction pour passer d'une forme symbolique à l'autre. ▸ La proportion (recherche de la quatrième proportionnelle). ▸ Situation inversement proportionnelle. ▸ Décomposition d'une fraction. ▸ Fraction comme une opération.

2.2 Un exemple de cartographie/continuum (inspiré d'une production de l'atelier Togo)

La **cartographie/continuum** est une vue synthétique du programme pour un concept donné. Elle met en évidence les différentes notions à aborder et présente leur évolution selon les niveaux dans le cycle. Voici un exemple portant sur l'enseignement des fractions de l'école primaire au collège.

Cartographie/continuum : le concept de fraction

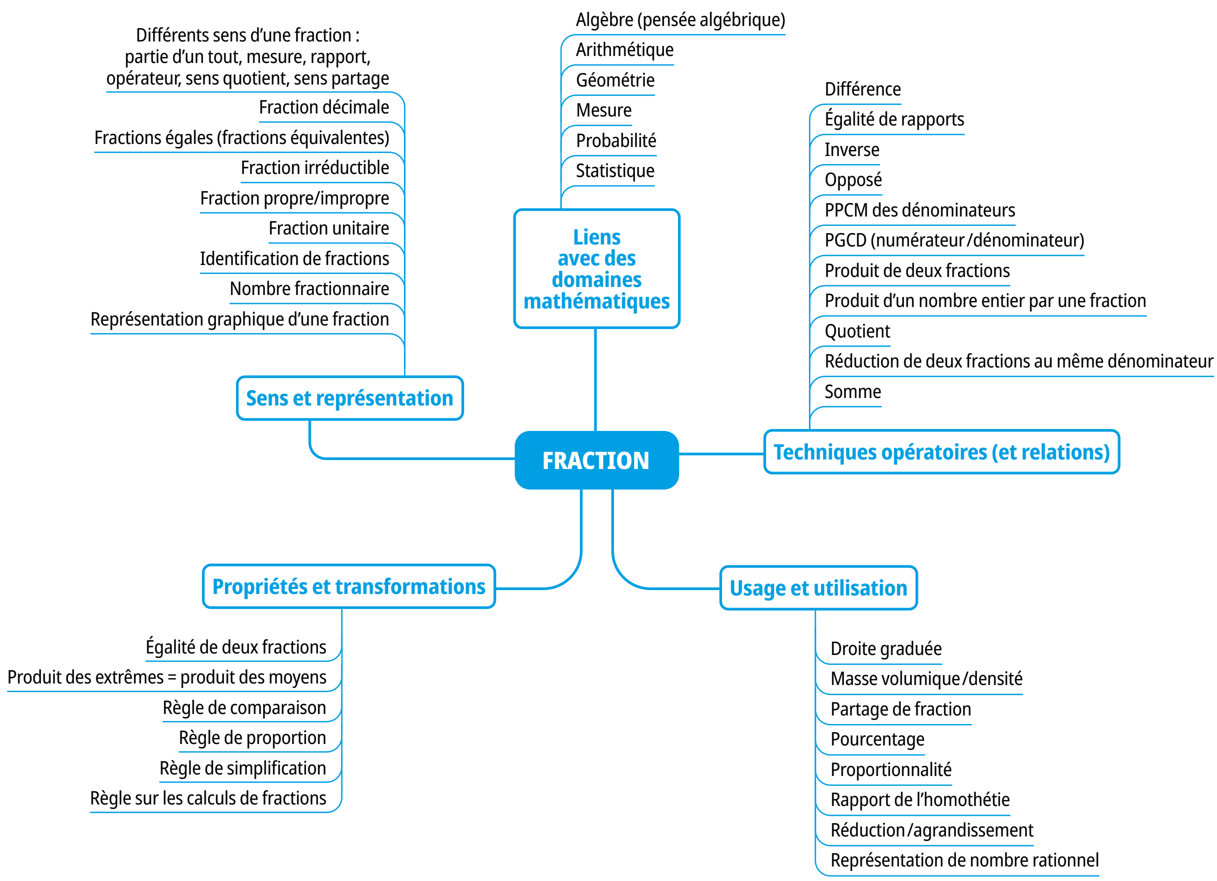
Catégorie	Sous-concepts	CM2	6e	5e	4e	3e
Sens et représentation	Identification de fraction (fractionnement, partie d'un tout)	✗	✗	✗✗	✗	✗
	Fraction unitaire	✗	✗	✗	✗✗	✗
	Fraction décimale		✗	✗✗	✗	✗
	Fractions équivalentes		✗	✗✗	✗	✗
	Fraction opposée	✗	✗✗	✗	✗	✗
	Fractions impropres (fractions > 1)	✗	✗	✗	✗	✗
	Pourcentage	✗	✗✗	✗✗	✗	✗
	Échelle	✗	✗✗	✗✗	✗	✗
	Fractions propres (fractions < 1)	✗	✗	✗	✗	✗
	Nombre fractionnaire	✗	✗✗	✗	✗	✗
	Fraction irréductible	✗	✗	✗	✗	✗
Techniques opératoires (et relations)	PPCM			✗	✗	✗
	PGCD (numérateur, dénominateur)			✗	✗	✗
	Produit d'un nombre entier par une fraction	✗	✗	✗	✗	✗
	Quotient de deux fractions	✗	✗✗	✗✗	✗	✗
	Simplification	✗	✗✗	✗✗	✗	✗
	Somme de deux fractions	✗	✗✗	✗✗	✗	✗
	Différence de deux fractions	✗	✗✗	✗✗	✗	✗
	Inverse d'une fraction	✗	✗✗	✗✗	✗	✗
	Produit de deux fractions	✗	✗	✗	✗	✗
	Décomposition en produit de facteurs premiers			✗	✗	✗

Catégorie	Sous-concepts	CM2	6e	5e	4e	3e
Techniques opératoires (et relations) *(suite)*	Encadrement d'une fraction			✗	✗	✗
	Réduction au même dénominateur	✗	✗✗	✗✗	✗	✗
	Comparaison des fractions	✗	✗✗	✗✗	✗	✗
	Puissances d'une fraction				✗	✗
Usage et utilisation (dans des situations spécifiques relevant des concepts à l'étude)	Pourcentage	✗	✗✗	✗✗	✗	✗
	Échelle	✗	✗	✗	✗	✗
	Fréquence				✗	✗✗
	Taux	✗	✗✗	✗✗	✗	✗
	Situations de proportionnalité	✗	✗	✗	✗	✗
	Partage d'un segment dans un rapport donné	✗	✗	✗	✗	✗
	Rapport de l'homothétie					✗
	Quatrième proportionnelle					✗
	Partage de segment	✗	✗	✗	✗	✗
Propriétés et transformations	Règles autour de la simplification des fractions	✗	✗✗	✗✗	✗	✗
	Règles autour des techniques opératoires de la simplification des fractions	✗	✗	✗✗	✗	✗
	Équivalence		✗	✗	✗	✗
	Règles de comparaison	✗	✗	✗	✗	✗
	Condition d'existence d'une fraction				✗	✗
	Propriété des proportions	✗	✗	✗	✗	✗
Liens avec des domaines mathématiques	Algèbre	✗	✗	✗	✗	✗
	Arithmétique	✗	✗	✗	✗	✗
	Statistique				✗	✗✗
	Géométrie	✗	✗	✗	✗	✗

Légende Les croix bleues et noires indiquent si le concept a plutôt un aspect outil ou objet dans l'enseignement de ce niveau de scolarité.

Croix bleue ✗ : objet. **Croix noire ✗ :** outil.

2.3 Un exemple de cartes conceptuelles produites lors d'ateliers (Congo)



2.4 Trois exemples de fiches pédagogiques traitant des fractions

Dans beaucoup de pays, les fractions sont introduites dès l'école primaire (CM1 ou CM2). Il en est de même des notions de fractions égales, fractions propres et impropres, fractions équivalentes et fractions irréductibles (voir cartographie de la notion ci-dessus). Il en est aussi de même des opérations sur les fractions, et notamment de l'addition des fractions. Toutefois, des différences existent quant aux techniques à privilégier (réduction au même dénominateur dans le cas de l'addition et de la soustraction par exemple avec usage ou non du PPCM). De même, si la technique est exposée selon le niveau, celle-ci est justifiée ou non. Les productions des ateliers font apparaître que, souvent, les aides pouvant être apportées à un niveau supérieur (5^{e} par exemple) reviennent à retravailler les représentations et les contextes qui ont servi à construire le sens de la technique l'année ou les années précédentes.

Nous avons donc fait le choix de proposer des exemples de fiches pédagogiques qui font apparaître cette progression, dans le sens donné aux techniques à une année donnée, et dans le recours à ce contexte en termes de remédiation ou d'aide les années suivantes.

Ainsi, la fiche sur l'addition des fractions au CM2 (issue de productions de l'atelier qui s'est déroulé au Tchad) vise à donner du sens à l'addition en se référant à des situations de partage d'aires. Il en sera de même pour la notion de fractions équivalentes en 6^{e} (atelier Tchad), alors qu'en 5^{e} (atelier Togo) la technique de l'addition de deux fractions avec recours au PPCM pour la réduction au même dénominateur sera justifiée par des économies en termes de complexité (des nombres de calculs et taille des nombres en jeu), le recours au partage d'aires rectangulaires étant fait pour l'aide aux élèves éprouvant des difficultés.

Nous présentons ainsi plusieurs étapes dans la construction du sens des fractions et la justification de techniques opératoires. Produites lors d'ateliers travaillant à partir de programmes éventuellement différents, ces étapes, si elles restent valides partout, sont évidemment à adapter en fonction du pays et de ses programmes d'enseignement. C'est justement un intérêt de l'élaboration des outils de la cartographie/continuum que de situer ces étapes dans un curriculum.

2.4.1 Exemple 1 : Donner du sens aux fractions et à l'addition de fractions

Préambule
Place de la séance dans la programmation

Les fractions constituent un thème étudié depuis le CM1. Les programmes du cours moyen (CM1 et CM2) indiquent :

- Les fractions ;
- Les opérations sur les fractions.

Les programmes de 6^{e} reprennent et complètent ces notions, en les développant ainsi :

- Différentes écritures d'une fraction ;
- Vocabulaire : numérateur, dénominateur, terme pour désigner/nommer une fraction (demi, tiers, quart, cinquième...) ;
- Simplification, amplification ;
- Écriture fractionnaire d'un nombre décimal ;
- Somme de deux fractions de même dénominateur ;
- Différence (lorsqu'elle est possible) de deux fractions de même dénominateur ;
- Produit d'un nombre entier naturel par une fraction.

Notons que les programmes de 5^{e} comportent les contenus suivants :

- Simplification d'une fraction ;
- Fraction irréductible ;
- Comparaison de deux fractions ayant le même numérateur ou le même dénominateur ;
- Comparaison d'une fraction à l'unité ;
- Somme de deux fractions ;
- Différence (lorsqu'elle est possible) de deux fractions ;
- Produit de deux fractions ;
- Écriture d'une fraction plus grande que l'unité sous la forme « ... avec » appartenant à IN ;
- Encadrement d'une fraction par deux nombres décimaux consécutifs de mêmes ordres.

Cela laisse supposer que l’étude des fractions jusqu’à la sixième cible l’étude des fractions plus petite que l’unité (sans que cela soit explicitement énoncé) et exclusivement positive. De même, la comparaison de deux fractions n’intervient explicitement qu’en cinquième.

Notons qu’aucune définition de la fraction n’est donnée explicitement. Il en est de même des notions de fractions équivalentes. Toutefois, on peut penser que les sens privilégiés sont ceux de partie d’un tout (avec éventuellement un lien avec le sens mesure et le quotient d’un entier naturel par un entier naturel non nul en sixième). La somme et la différence de fractions de dénominateurs différents ne font pas partie des programmes de sixième alors qu’elles semblent implicitement contenues dans les programmes de cycle moyen.

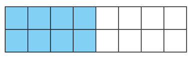
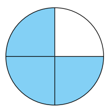
Les programmes, s’ils évoquent et soulignent l’intérêt des méthodes actives pour l’enseignement et l’apprentissage, ne relient pas explicitement celles-ci à la résolution de problèmes (en mathématiques). Toutefois, en préambule, les programmes du primaire fixent entre autres objectifs : « apprendre à résoudre des situations-problèmes ».

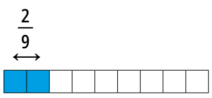
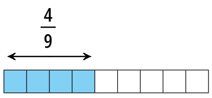
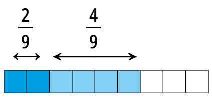
L’apprentissage par tous les élèves des concepts mathématiques prévus par les programmes et des éléments de langage associés nécessite de mettre en place des activités signifiantes et contextualisées qui vont leur permettre de comprendre et de construire progressivement le sens de ces concepts et les désignations associées. Ainsi, la fraction pourra être introduite à l’aide de schémas représentant des partages d’aires de formes rectangulaire ou circulaire, ou la droite graduée.

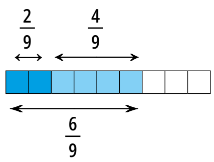
Le lecteur trouvera en pages suivantes un exemple de fiche pédagogique.

La fiche pédagogique

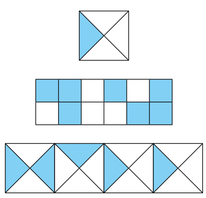
Séance 1 Addition de deux fractions de même dénominateur

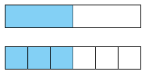
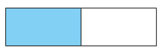
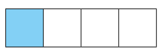
Phases didactiques	Activités du professeur	Activités de l'élève	Observations
1 Introduction ▸ Réveil des automatismes ▸ Vérification des préalables	**a.** 7×5 ; 65×10 ; 15×100 **b.** Le professeur demande aux élèves d'écrire la fraction correspondante à chaque schéma.   **c.**  **d.** Représente la fraction $\frac{4}{6}$.	**a.** Les élèves répondent successivement 35 ; 650 ; 1500 et justifient leurs réponses. **b.** Réponse attendue : $\frac{3}{5}$ Réponse attendue : $\frac{8}{16}$ Notons que certains élèves peuvent répondre : $\frac{1}{2}$ Cela permettra au professeur de reprendre cet exemple plus tard comme exemple de fractions égales. **c.** Réponse attendue : $\frac{3}{4}$ **d.** Plusieurs schémas sont possibles (partages de rectangles, partage d'un disque...).	Il s'agit ici d'une activité indépendante du reste de la séance visant le réveil d'automatismes. Il est possible de faire d'autres choix. Par exemple de demander de calculer le double, le triple ou un multiple d'un nombre entier ou de calculer la moitié, le tiers d'un entier multiple de 2 ou de 3, etc.
▸ Orientation	La leçon d'arithmétique d'aujourd'hui porte sur l'addition des fractions. À la fin, chacun doit être capable d'additionner des fractions, et de réduire des fractions au même dénominateur.	Les élèves écoutent et perçoivent l'objet de la leçon.	
▸ Élément déclencheur	Le professeur copie l'énoncé au tableau : « Ali donne les $\frac{2}{9}$ de ses billes à Moussa et les $\frac{4}{9}$ à Haroum. – Représente par un schéma la fraction de billes reçue par chaque enfant. – Quelle est la fraction qui représente le total des billes données ? »	Les élèves observent.	

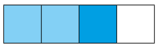
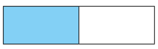
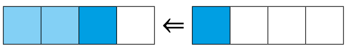
Phases didactiques	Activités du professeur	Activités de l'élève	Observations
❷ **Présentation de la leçon, recherche des élèves**	Le professeur lit l'énoncé de la situation-problème et leur demande de la traiter sans aucune explication. Le professeur donne des explications et des orientations précises : – Quelles sont les parts de billes reçues par Ali ? Par Moussa ? – Comment a-t-on appris à représenter ces fractions ? – Quelle est la part reçue en tout par les deux enfants ?	Les élèves doivent représenter les parts reçues par chaque enfant puis par les deux et traduire cela par une somme de fractions à calculer [schémas a et b] : Schéma a  Schéma b 	La représentation en rectangle est plus aisée compte tenu du nombre de parts total à représenter.
	Le professeur peut suggérer de représenter les deux parts sur un même schéma comme ci-contre [schéma c].	Les élèves traitent à nouveau le problème : Schéma c 	Représentation sur un même schéma des deux parts reçues [schéma c].
	Comment avez-vous fait pour calculer la fraction qui représente le total des billes données par Ali ?	On a représenté les fractions sur un même schéma [schéma c] et on les a additionnées. $\frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{6}{9}$	Les élèves peuvent donner d'autres représentations. Traduction de la situation à l'aide d'une addition de fractions.
❸ **Ce qu'il faut retenir**	Le professeur confirme le résultat. Il ajoute : « Attention nous avons pu les représenter sur un même schéma, car elles ont un même dénominateur. » « Comment avez-vous fait pour additionner ces deux fractions qui ont un même dénominateur ? » Maintenant on sait comment additionner deux fractions qui ont un même dénominateur. Le professeur dessine le schéma attendu au tableau et écrit la règle générale : [*continue en page suivante*]	Les élèves écoutent et tentent de répondre. Réponse attendue : « On additionne les numérateurs, on garde le dénominateur commun. »	

Phases didactiques	Activités du professeur	Activités de l'élève	Observations
❸ **Ce qu'il faut retenir** *(suite)*	« Pour additionner deux fractions qui ont un même dénominateur, j'additionne les numérateurs et je garde le dénominateur commun. » Je peux m'aider en faisant un schéma : 		
▸ Réinvestissement	**a.** Représente à l'aide d'un schéma les fractions : $\frac{4}{7}$; $\frac{2}{4}$		Exercices de réinvestissement : calculs formels.
	b. Effectue les opérations suivantes : $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = ?$ $\frac{4}{15} + \frac{2}{15} = ?$	**b.** Réponses attendues : $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$ $\frac{4}{15} + \frac{2}{15} = \frac{6}{15}$	
	c. Un jardinier utilise $\frac{2}{11}$ d'un rouleau de fil de fer pour clôturer son jardin et $\frac{5}{11}$ de ce rouleau pour faire un enclos. Calcule la fraction de rouleau utilisée par le jardinier.	**c.** Réponse attendue : $\frac{7}{11}$	Le but ici est de réinvestir l'addition de fractions dans le cadre de la résolution d'un problème.

Séance 2 Égalité de fractions, réduction au même dénominateur de deux fractions, somme de deux fractions de dénominateurs différents

Phases didactiques	Activités du professeur	Activités de l'élève	Observations
❶ **Préalables** ▸ Représentations de fractions ▸ Égalités de fractions	Écrit la fraction qui correspond à chaque schéma : 	Le professeur aidera dans chaque cas à identifier le tout (l'unité) et la partie. Réponses attendues : $\frac{1}{4}$; $\frac{7}{12}$; $\frac{5}{16}$	Le but est ici, en diversifiant les schémas représentatifs des fractions, de montrer qu'il faut prendre en compte le nombre de parts égales total et le nombre de part coloriées.

Phases didactiques	Activités du professeur	Activités de l'élève	Observations
❷ **Égalités de fractions**	Le professeur dessine au tableau les schémas ci-dessous. Il demande aux élèves d'observer ces schémas. Il écrit ensuite l'énoncé de la question a. et demande aux élèves d'y répondre. 	Les élèves observent les schémas.	
	a. « Ali a dit que le premier schéma représente $\frac{1}{2}$. Fatima dit que le second schéma représente $\frac{3}{6}$. Sara dit que les fractions sont égales et représentent la même quantité. Qu'en penses-tu ? » Le professeur valide les propositions.	Les élèves doivent vérifier que les réponses des trois enfants sont vraies et en déduire l'égalité des fractions : $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ Les trois enfants ont raison.	
	b. Il demande : « Compare les numérateurs 1 et 2 et les dénominateurs 2 et 6 entre eux. Que remarques-tu ? » Le professeur conclut : $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6}$ « Deux fractions sont égales si on a multiplié les numérateur et dénominateur de la première par le même nombre pour obtenir les numérateur et dénominateur de la seconde. »	On a multiplié 1 par 3 et 2 par 3. $1 \longrightarrow 3$ $2 \longrightarrow 6$	
▸ Élément déclencheur	Le professeur demande aux élèves de représenter les fractions $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ à l'aide d'un schéma.	Les élèves essaient de traiter la question. Les élèves représentent $\frac{1}{2}$:  Les élèves représentent $\frac{1}{4}$: 	
	« Peux-tu représenter ces deux fractions sur un même schéma ? »	Pour représenter les deux fractions sur un même schéma, ils doivent représenter $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ et $\frac{1}{4}$. 	

Phases didactiques	Activités du professeur	Activités de l’élève	Observations
▸ Élément déclencheur *(suite)*	Calcule la somme $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. Le professeur pourra proposer comme aide de trouver une fraction égale à $\frac{1}{2}$ ayant pour dénominateur 4.	Ils doivent réduire $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ au même dénominateur. Les élèves représentent $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4}$ et $\frac{1}{4}$ sur le même schéma (unité partagée en quatre). 	
	Le professeur conclut : $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ « Pour additionner $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$, nous avons trouvé un dénominateur commun aux deux fractions et nous avons effectué la somme des deux fractions. On dit que l’on a réduit au même dénominateur les deux fractions. Pour réduire au même dénominateur deux fractions, il faut trouver un dénominateur commun, c’est-à-dire un multiple commun aux deux dénominateurs. » Nous nous sommes aidés d’un schéma.  $\Downarrow \ \frac{1}{2} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4}$  Le professeur énonce la règle générale : « Pour additionner les fractions ayant des dénominateurs différents, je réduis au même dénominateur ces deux fractions puis j’additionne les numérateurs et garde le dénominateur. »	Les élèves suivent et comprennent. Ils peuvent demander des explications supplémentaires.	

Phases didactiques	Activités du professeur	Activités de l'élève	Observations
Réinvestissement	« Peux-tu trouver une fraction égale à $\frac{2}{3}$ et une fraction égale à $\frac{1}{4}$ ayant le même dénominateur ? Calcule la somme $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$. Aide possible : réduis les deux fractions au même dénominateur. Pour cela, tu dois trouver un multiple commun à 3 et 4. » Le professeur validera les propositions des élèves et exposera ou fera exposer par un élève une solution s'appuyant si besoin sur un schéma. $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} + \frac{1 \times 3}{4 \times 3}$ $= \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$ Parfois on peut simplifier la fraction obtenue en divisant numérateur et dénominateur par un même nombre, mais ce n'est pas toujours possible.	Réponse attendue : 3 et 4 ont comme multiple : $3 \times 4 = 12$ Donc : $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$ et : $\frac{1}{4} = \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3}{12}$ $\boxed{\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}}$	
Réinvestissement et résolution de problème	**1.** Reprendre les problèmes de la fiche initiale et les exercices d'évaluation. a. Nodji achète une concession. Elle paie les $\frac{4}{21}$ du prix à l'achat, puis deux mois plus tard, $\frac{5}{21}$ et $\frac{6}{21}$. Je calcule la fraction du prix qu'elle a payé. b. Un cultivateur laboure $\frac{2}{3}$ de son champ le matin et $\frac{1}{4}$ le soir. Quelle fraction représente la partie labourée du champ ? **2.** Additionner $\frac{2}{5}$ et $\frac{3}{6}$.	Réponses attendues : $\frac{15}{21}$; $\frac{11}{12}$; $\frac{27}{30} = \frac{9}{10}$	**N.B. :** On pourra remarquer que : $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

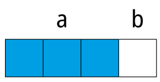
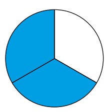
2.4.2 Exemple 2 : Donner du sens à l'addition et à la multiplication de fractions en 6^e

Cet exemple témoigne d'une première évolution. Il s'agit d'une étape intermédiaire entre la présentation adoptée pour l'exemple 1 et l'exemple 3 dont la présentation est conforme à la fiche pédagogique modèle exposée dans le chapitre précédent.

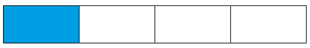
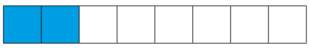
Fiche n° 2

- **Établissement :** ....
- **Nom du professeur :** .... **Grade et échelon :** ....
- **Classe :** 6e A **Effectif :** 50 **Filles :** 17 **Garçons :** 33
- **Discipline :** Mathématiques.
- **Domaine :** Activités numériques.
- **Thème :** Fractions.
- **Date :** 06/12/2021 **Horaire :** de 14 h 00 à 15 h 30 **Durée :** 1 h 30
- **Objectif général :** Cette leçon amène les élèves à maîtriser les opérations sur les nombres fractionnaires.
- **Objectifs spécifiques :** À la fin de cette leçon, les élèves doivent être capables de :
  1. Identifier une fraction (reconnaître et savoir ce qu'est une fraction ; reconnaître des fractions se rapportant à des éléments du quotidien [représentations concrètes ou imagées] ; représenter une fraction de différentes façons à partir d'un tout ou d'une collection ; associer une fraction à une partie d'un tout [parties isométriques ou parties équivalentes] ou d'un groupe d'objets et vice versa).
  2. Déterminer les fractions égales (reconnaître et déterminer des représentations équivalentes ; construire un ensemble de fractions équivalentes).
- **Matériels didactiques :**
  1. Références documentaires :
     - Collection inter-africaine de mathématiques - CIAM, mathématiques 6e, pp. 182-185.
     - *Les Génies en mathématiques*, 6e, pp. 26-29.
  2. Instruments : Tableau, règle graduée, équerre, craies, éponge (chiffon)...
- **Méthode utilisée :** active.

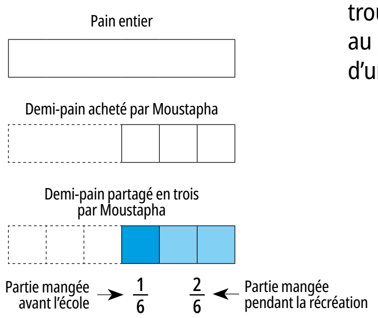
Fractions en 6e

Phases didactiques	Activités de l’enseignant	Activités des élèves	Observation
Introduction : ‣ Prérequis ‣ Orientation	Le professeur écrit la date puis : « Effectuer la division de 48 par 12. Quel est le quotient de cette division ? Quel est son reste ? »	Écoutent et observent. $48 = 4 \times 12 + 0$ Certains élèvent peuvent proposer 48 divisés par 12 et le traduire par « le quotient est ». $4 = \frac{48}{12}$ ⇒ Il reste 0.	
Déroulement de la leçon	Écrit le titre de la leçon et les objectifs spécifiques au tableau. 1. Identifier une fraction. 2. Savoir reconnaître deux fractions égales. **Vocabulaire et écriture d’une fraction** 1. Le professeur demande aux élèves d’observer le schéma (voir figure)  2. Il demande ensuite : que représente la surface colorée en bleu par rapport à la surface totale ? 3. Que représente la surface blanche par rapport à la surface totale ? 4. Mêmes questions pour cette figure.  Partie bleue : a Partie blanche : b 5. Peux-tu représenter par un schéma ces fractions ? $\frac{2}{4}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{5}{6}$	Écoutent et prennent des notes. $a = \frac{3}{4}$ $b = \frac{1}{4}$ $a = \frac{2}{3}$ $b = \frac{1}{3}$	Le professeur peut s’appuyer sur le pliage de papier.

Phases didactiques	Activités de l'enseignant	Activités des élèves	Observation
Déroulement de la leçon *(suite)*	**6.** Qu'est-ce qu'une fraction ? Le professeur énonce deux définitions et rappelle le vocabulaire associé : **a. Définition :** Une fraction est la représentation d'un nombre rationnel sous la forme $\frac{a}{b}$ où a et b sont des nombres entiers et b est différent de zéro. • Si a < b, la fraction est appelée fraction propre. • Si a > b, la fraction est appelée fraction impropre. **b. Écriture :** Une fraction est exprimée à l'aide de deux nombres entiers naturels, comme suit avec b différent de zéro (non nul) : $\frac{a}{b}$ • a est le numérateur, • b est le dénominateur, • a et b sont les termes de la fraction. **Exemples :** $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{4}$ **c. Lecture :** Le professeur énonce la seconde définition : « Le rationnel $\frac{a}{b}$ est égal au quotient de l'entier a par l'entier b non nul. » $\frac{a}{b}$ se lit : fraction ou quotient de a par b. **Exemples :** $\frac{1}{5}$ se lit : quotient de 1 par 5 ou encore un cinquième. $\frac{3}{8}$ se lit : trois huitièmes ou quotient de 3 par 8.	On peut s'attendre à des réponses du type : – C'est une partie d'une chose. – C'est un nombre plus petit que 1. – C'est par exemple un demi. – Il y a un nombre au-dessus d'une barre et un nombre en dessous. – Etc.	Énoncé de deux sens de la notion de fraction, l'une fait référence à la partie d'un tout, l'autre fait le lien avec la notion de division et de quotient.

Phases didactiques	Activités de l’enseignant	Activités des élèves	Observation
Activité 1	Le professeur dessine au tableau les deux schémas ci-dessous et demande aux élèves : « Observe les schémas ci-dessous : Dans le premier, on a partagé l’unité en quatre parties égales, la fraction de la partie colorée est $\frac{1}{4}$. Dans le second schéma, on a partagé l’unité en huit parties égales, la fraction de la partie colorée est $\frac{2}{8}$. Compare ces deux fractions. Sont-elles égales ? » $\frac{1}{4}$  $\frac{2}{8}$  « Compare les deux numérateurs et compare les deux dénominateurs. Que constates-tu ? » Le professeur valide les propositions des élèves et fait une synthèse. **Règles :** • On obtient une fraction égale à une fraction donnée, en multipliant le numérateur et le dénominateur de cette fraction par un même nombre entier naturel non nul. • On obtient une fraction égale à une fraction donnée en divisant le numérateur et le dénominateur de cette fraction par un diviseur commun non nul. **Exemple :** $\frac{1}{5}$ et $\frac{3}{15}$ sont des fractions égales, car : $\frac{1}{5} = \frac{1 \times 3}{5 \times 3} = \frac{3}{15}$ De même : $\frac{2}{3}$ et $\frac{18}{27}$ sont égales, car : $\frac{18 : 9}{27 : 9} = \frac{2}{3}$	Réponses attendues : Les deux fractions sont égales : $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ $2 = 1 \times 2$ $8 = 4 \times 2$ Les numérateur et dénominateur de la première ont été multipliés par le même nombre 2. Toutefois certains élèves peuvent dire que ce ne sont pas deux fractions égales, car les numérateurs et les dénominateurs sont différents.	

Phases didactiques	Activités de l'enseignant	Activités des élèves	Observation
Activité 2	Trouver, parmi les fractions suivantes, celles qui sont égales à $\frac{2}{3}$; à $\frac{3}{4}$: $\frac{10}{15}$ $\frac{6}{10}$ $\frac{9}{12}$ $\frac{4}{6}$ $\frac{12}{18}$ $\frac{6}{4}$ $\frac{15}{20}$	Réponses attendues : Les fractions égales à $\frac{2}{3}$: $\frac{4}{6} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{3}$ ou $\frac{4}{6} = \frac{4 : 2}{6 : 2} = \frac{2}{3}$ $\frac{12}{18} = \frac{2 \times 6}{3 \times 6} = \frac{2}{3}$ ou $\frac{12}{18} = \frac{12 : 6}{18 : 6} = \frac{2}{3}$ $\frac{10}{15} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{2}{3}$ ou $\frac{10}{15} = \frac{10 : 5}{15 : 5} = \frac{2}{3}$ Les fractions égales à $\frac{3}{4}$: $\frac{9}{12} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3}{4}$ ou $\frac{9}{12} = \frac{9 : 3}{12 : 3} = \frac{3}{4}$ $\frac{15}{20} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{3}{4}$ ou $\frac{15}{20} = \frac{15 : 5}{20 : 5} = \frac{3}{4}$	
Réinvestissement ou évaluation	**Exercice 1 :** « Parmi les fractions ci-dessous, regroupe celles qui sont égales. » $\frac{9}{12}$ $\frac{6}{12}$ $\frac{10}{50}$ $\frac{36}{48}$	Les fractions égales sont : $\frac{9}{12} = \frac{36}{48}$	
	Exercice 2 : « Chaque matin, Moustapha achète un demi-pain, le partage en trois parts égales, mange une part et garde le reste pour la recréation. Quelle fraction d'un pain, Moustapha mange-t-il chaque matin ? »	Les élèves peuvent ne pas se représenter le problème et répondre par exemple $\frac{1}{3}$ du demi-pain et ne pas savoir calculer ce résultat ou bien encore considérer le demi-pain comme une unité et répondre $\frac{1}{3}$ (sous-entendu du demi-pain).	

Phases didactiques	Activités de l'enseignant	Activités des élèves	Observation
Réinvestissement ou évaluation *(suite)*	**Aide :** Le professeur pourra suggérer aux élèves de faire un schéma représentant le demi-pain et la partie mangée chaque matin.  	Le professeur devra alors leur demander comment on peut représenter et calculer $\frac{1}{3}$ du demi-pain en prenant comme unité le pain en entier, c'est-à-dire trouver la fraction qui correspond au partage en trois parts égales d'un demi-pain.	
Clôture	• Remplit le cahier de texte et donne des consignes pour les activités futures. • S'assure que le tableau est propre pour celui qui va le remplacer.		

2.4.3 Exemple 3 : Donner du sens à l'addition de fractions en 5^{e}

Cette fiche intègre également des éléments de remédiation. Il s'agit d'un exemple d'application détaillée de la fiche modèle exposée au chapitre 3. Elle comporte notamment une analyse à priori des variables de commande sur lesquelles le professeur peut jouer pour amener les élèves à produire des procédures de calcul différentes et à comprendre en quoi la mobilisation du PPCM des dénominateurs peut s'avérer être un gain en coût et économie de calcul.

- **Fiche nº :** 1 ou **Séquence nº :** 1
- **Établissement :** ....
- **Thème/concept :** Fractions
- **Sous-concept/chapitre :** Addition de deux fractions
- **Leçon nº ou Séance nº :** 1
- **Classe :** 5^{e} **Effectif des élèves :** 60 **Date :** ....
- **Durée :** ....

Des éléments d'analyse à priori

Exposons des éléments d'une analyse à priori de la tâche d'un élève de 5^{e} à qui le professeur propose le calcul d'une somme de deux fractions de dénominateurs différents.

- **Des prérequis installés et rappelés** : l'enseignant a proposé préalablement des calculs à effectuer rappelant des prérequis de 6^{e} : techniques d'addition de deux fractions de même dénominateur et technique d'addition de deux fractions dont le dénominateur de l'un est un multiple du dénominateur de l'autre (mais sans mobilisation du PPCM). La notion de PPCM et des techniques pour le déterminer ont fait également l'objet d'un enseignement préalable.

- **Une variable de commande** : le choix des dénominateurs des fractions est ici une variable de commande pour le professeur. Ce choix peut favoriser la mobilisation de certaines procédures.

- **Cas de dénominateurs de petite taille ou premiers entre eux :**

  Si le calcul proposé fait intervenir des dénominateurs de taille trop petite (par exemple $\frac{1}{3} + \frac{2}{7}$) ou s'ils sont premiers entre eux, et si le professeur n'attire pas l'attention de l'élève sur une procédure de calcul particulière, il y a peu de chance que l'élève mobilise des procédures faisant intervenir une recherche d'un multiple commun autre que le produit des dénominateurs et notamment du PPCM de ces derniers. En effet, la multiplication des deux dénominateurs entre eux donne aisément un multiple commun et la détermination des facteurs à prendre en compte pour réduire au même dénominateur les deux fractions est immédiate.

- **Cas de dénominateurs plus grands et non premiers entre eux :**

En revanche, si les fractions font intervenir des nombres plus grands et non premiers entre eux il peut en être autrement, comme le prouve la comparaison en termes d'économie de calculs des procédures ci-dessous. Considérons la somme $\frac{17}{30} + \frac{5}{12}$.

- **Étude de la recherche de multiples communs aux dénominateurs :**

Le produit des dénominateurs 30 × 12 est le multiple commun le plus facile à trouver. Il entraîne des calculs complexes.

Une recherche un peu organisée permet de trouver aisément le multiple commun 60. En effet, 60 est un multiple de 30 (c'est le multiple qui suit directement 30 dans la liste des multiples de ce nombre). C'est aussi un multiple de 12. Cela peut se vérifier aisément en parcourant systématiquement la liste des multiples de 12 (12, 24, 36, 48, 60, etc.) ou en effectuant un calcul écrit ou mental. Notons alors que si c'est le premier multiple trouvé grâce à cette procédure de recherche, la prise de conscience que c'est aussi le PPCM n'est pas obligatoire pour poursuivre les calculs de l'addition recherchée.

La détermination du multiple 120 n'est également pas trop difficile, car c'est à la fois le double de 60 et le nombre obtenu en multipliant 12 par 10.

En revanche, les autres multiples qui ne sont ni le PPCM ni le produit direct des deux facteurs (comme 180, 240, etc.) sont plus difficiles à déterminer sans une recherche organisée ou si une liste de multiples de ces derniers n'est pas disponible.

Il est donc possible pour les élèves de déterminer des multiples communs à 30 et 12 et notamment les multiples 60, 120 et 360 = 30 × 12.

- **Une comparaison en termes de coût et d'économie qui permet de justifier le choix du multiple 60 comme dénominateur commun :**

Nous nous contenterons de comparer les calculs dans les cas des choix 360 (procédure [A]) et 60 (procédure [B]) comme multiples. Comparons les avantages et inconvénients en termes de coût et d'économie des deux procédures ci-dessous. On constate les éléments suivants.

La première permet de déterminer aisément un multiple commun aux deux dénominateurs. La détermination des nombres à prendre en compte dans les calculs permettant d’obtenir les fractions équivalentes (respectivement 12 et 30) est immédiate, car ce sont les dénominateurs des fractions initiales. En revanche, les calculs à effectuer ensuite sont relativement complexes, notamment si l’élève ne dispose pas de calculatrice. Enfin, la fraction obtenue doit être ensuite ramenée à sa forme irréductible si c’est demandé dans la consigne ou si cela fait partie d’un contrat implicite dans la classe.

[A] $$\frac{17}{30} + \frac{5}{12} = \frac{17 \times 12}{30 \times 12} + \frac{5 \times 30}{12 \times 30} = \frac{204}{360} + \frac{150}{360} = \frac{354}{360} = \frac{59}{60}$$

[B] $$\frac{17}{30} + \frac{5}{12} = \frac{17 \times 2}{30 \times 2} + \frac{5 \times 5}{12 \times 5} = \frac{34}{60} + \frac{25}{60} = \frac{59}{60}$$

La seconde procédure qui mobilise implicitement ou explicitement le PPCM des dénominateurs nécessite certes la détermination de 60 et donc de penser explicitement à trouver un dénominateur commun autre que celui obtenu en multipliant les dénominateurs entre eux. La détermination des facteurs (respectivement 2 et 5) permettant de réduire aux mêmes dénominateurs les fractions initiales n’est pas trop difficile à effectuer (même mentalement). Les calculs qui suivent alors sont plus simples à effectuer (surtout si on interdit l’usage des calculatrices ou si les élèves n’en disposent pas). De plus, la fraction obtenue (dans notre cas) est directement irréductible.

- **Conclusion :** nous constatons donc que ce choix des nombres 30 et 12 comme dénominateurs :
  - permet une comparaison des procédures de calcul plutôt à l’avantage de la procédure faisant intervenir 60 ;
  - que la production par des élèves de cette procédure est plausible.

De ce fait, une séance (pouvant éventuellement se découper en deux séances successives) qui prévoit un moment de rappel des prérequis de 6^{e} (addition de deux fractions de mêmes dénominateurs et addition de fractions dont le dénominateur de l’une est un multiple du dénominateur de l’autre), débouchant sur le constat que les élèves savent calculer une somme de fractions quand les dénominateurs sont les mêmes et qui propose ensuite de comparer les procédures de calculs en termes d’économie et de coût dans le cas que nous venons d’évoquer, permet de justifier la mobilisation du PPCM et de déboucher sur une règle générale de l’addition de deux fractions.

N. B. 1 : Si les élèves ne prennent pas conscience de la nécessité de trouver un dénominateur commun, le professeur peut leur demander ce qu'ils savent faire pour additionner deux fractions et dans quels cas ils le savent afin de rappeler cet élément en mémoire.

N. B. 2 : Si les élèves ne produisent pas la procédure faisant intervenir le PPCM, le professeur fera comparer les éventuelles procédures conduisant au résultat en fonction des mêmes critères de coût. Il pourra ensuite amener à les comparer avec cette procédure mobilisant le PPCM. Il peut :

- soit la proposer lui-même.
- soit par exemple dire : « Un élève d'une autre classe a calculé d'abord le PPCM puis l'a utilisé pour réduire au même dénominateur les fractions et ensuite les additionner. Essayez de faire pareil et comparez cette méthode avec ce que vous aviez fait avant. »

N. B. 3 : La comparaison est plus évidente avec des dénominateurs encore plus grands, mais le risque de ne pas avoir d'élèves capables de mobiliser le PPCM est plus grand. Il en est de même avec l'addition quand on pose directement l'addition de trois fractions un peu complexes (voir ci-dessous).

$$\frac{7}{15} + \frac{5}{6} + \frac{4}{9} = \frac{7 \times 6 \times 9}{15 \times 6 \times 9} + \frac{5 \times 15 \times 9}{810} + \frac{4 \times 15 \times 6}{810}$$

$$= \frac{378}{810} + \frac{675}{810} + \frac{360}{810} = \frac{1413}{810} = \frac{157}{90}$$

$$\frac{7}{15} + \frac{5}{6} + \frac{4}{9} = \frac{7 \times 6}{15 \times 6} + \frac{5 \times 15}{6 \times 15} + \frac{4 \times 10}{9 \times 10} = \frac{42}{90} + \frac{75}{90} + \frac{40}{90} = \frac{157}{90}$$

1 ANALYSE À PRIORI *(sections 1 à 10)*

1. Intentions de l'enseignant : Quelles sont les intentions didactiques de l'enseignant ?

L'intention de l'enseignant est d'apprendre aux élèves ce qu'est l'addition des fractions et comment additionner des fractions.

2. Justification de la leçon (au regard du programme ou des savoirs)

L'addition des fractions de même dénominateur a été déjà introduite en 6^e. Il s'agit maintenant de renforcer et de généraliser chez les élèves de 5^e la maîtrise de cette opération par l'introduction de l'outil PPCM, dans le but de réduire les calculs et d'obtenir plus aisément des fractions irréductibles. Cet usage du PPCM est nouveau par rapport au programme de 6^e qui comportait seulement l'addition dans les cas où elles ont même dénominateur ou si le dénominateur de l'une est multiple du dénominateur de l'autre, et ce bien que cette addition dans le cas général fasse partie des programmes de l'école primaire comme le montre la cartographie/continuum.

3. Objectifs visés en termes d'apprentissage

À la fin de la leçon, les élèves doivent être capables :

- de calculer la somme de deux fractions ayant le même dénominateur ou de deux fractions ayant des dénominateurs différents ;
- de justifier par une propriété le calcul de la somme de fractions ;
- de décrire un programme de calculs sur la somme de fractions.

4. Objets d'apprentissage

- Somme de fractions de même dénominateur.
- Somme de fractions de dénominateurs différents, l'un étant multiple de l'autre.
- Somme de fractions de dénominateurs différents avec utilisation du PPCM.

5. Prérequis et préalables

- Multiples de deux nombres entiers naturels.
- Somme de fractions de mêmes dénominateurs.
- Somme de fractions de dénominateurs différents.
- PPCM de deux ou plusieurs nombres entiers.

6. Ressources (matériels didactiques)

- Matériel individuel : calculatrice.
- Matériel collectif : instruments de géométrie, calculatrices, documentaires.
- Diverses ressources bibliographiques ou webographiques : livres, fichiers électroniques.

7. Stratégies d'enseignement

- Travail individuel.
- Travail en petits groupes.
- Questions/réponses.

8. Prise en compte des dimensions genre/inclusivité/différence

- Alterner la sollicitation des filles et des garçons.
- Prise en compte des différentes formes de handicaps.
- Proposer des problèmes qui prennent en compte des noms de filles et de garçons.
- Former des groupes de travail mixte.

9. Références

- Diverses références bibliographiques ou webographiques : conseils pédagogiques, journées pédagogiques, livres CIAM pour des prolongements.
- Manuel programme 6e et 5e.

10. Anticipation

10.1. Obstacles possibles mathématiques ou didactiques au regard de l'analyse conceptuelle et des ressources développées

Obstacles anticipés	Actions (processus de remédiation)
Obstacle didactique : façon d'enseigner l'addition	Proposer plusieurs activités d'addition de deux fractions ; donner un sens à l'opération.
Obstacle ontogénique : la représentation de l'addition par l'élève.	Proposer plusieurs activités d'addition de deux fractions ; donner un sens à l'opération.

10.2. Difficultés possibles mathématiques ou didactiques au regard de l'analyse conceptuelle et ressources développées

Difficultés anticipées	Actions (processus de remédiation)
Addition de fractions de même dénominateur : addition des numérateurs et des dénominateurs entre eux (erreur découlant d'une conception de la fraction comme couples de deux entiers).	Utiliser un schéma représentant par exemple les fractions en jeu par des aires rectangulaires.

Continue en page suivante ▸

Difficultés anticipées	Actions (processus de remédiation)
Addition de fractions dont le dénominateur de l'une est un multiple du dénominateur de l'autre (même source d'erreur que ci-dessus).	Utiliser les fractions équivalentes pour obtenir le dénominateur souhaité (le plus grand ici). Il est aussi possible de faire appel à des schémas du type précédent si la convocation de la notion de fractions équivalentes ne suffit pas.
Addition de fractions de dénominateurs différents.	Difficulté à déterminer les fractions équivalentes de mêmes dénominateur liée à la difficulté d'appréhender la nécessité de chercher un dénominateur commun le plus petit possible et notamment de recourir au PPCM.

10.3. Erreurs possibles mathématiques au regard de l'analyse conceptuelle et des ressources développées

Erreurs anticipées	Actions (processus de remédiation)
Addition des numérateurs et des dénominateurs entre eux.	Retour à la représentation de fractions comme partage d'aires rectangulaires.

❷ PENDANT ET APRÈS LA CLASSE *(sections 11 à 13)*

11. Déroulement

Étape 1 **Phase de mise en situation, addition de deux fractions de même dénominateur**

- Contrôle des prérequis
- Situation déclenchante

Première situation : addition de deux fractions de même dénominateur

Type et contenu des tâches	Activités attendues
Tâches et activités d'enseignement/ apprentissage au regard de l'analyse conceptuelle et des ressources développées	**Activité du professeur :** - Il anticipe les erreurs des élèves. - Il propose l'activité portant sur les prérequis et énonce la consigne. - Il observe les productions des élèves. - Il propose des aides de façon individuelle, voire collective si besoin (voir ci-dessous). - Sur la base de l'analyse des productions des élèves, il rappelle la règle à mobiliser dans ce cas particulier. « Pour additionner deux fractions qui ont même dénominateur, j'additionne les numérateurs et je garde le dénominateur commun. » **Activité de prérequis :** - Calcule : $\frac{5}{8} + \frac{2}{8}$

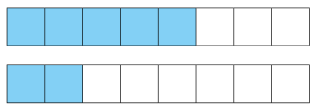
Type et contenu des tâches	Activités attendues

Tâches et activités *(suite)*

Activité mathématique de l'élève :

- Calculer $\frac{5}{8} + \frac{2}{8}$.
- La réalisation de la tâche prescrite nécessite pour l'élève :
  - d'identifier et de se représenter la situation,
  - de constater que les dénominateurs sont les mêmes et donc soit d'appliquer la règle d'addition des numérateurs dans le cas où il la connaît et s'en rappelle (cf. programme 6e),
  - soit d'essayer de se représenter cette somme en faisant appel à des schémas par exemple.

Aide :

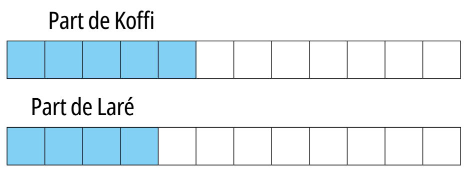


Activité de remédiation :

« Le jour de ton anniversaire, ton papa t'offre deux gâteaux découpés chacun en 12 morceaux :

1. Quelle fraction représente un morceau de gâteau ?
2. Pour le premier gâteau, tu offres 5 morceaux à Koffi et 4 morceaux à Laré. Quelle est la fraction du gâteau que tu as offert à tes amis Koffi et Laré ? »

Aide :



Savoirs en jeu — Addition de fractions de même dénominateur.

Deuxième situation : addition de deux fractions dont le dénominateur de l'une est un multiple du dénominateur de l'autre

Type et contenu des tâches	Activités attendues

Tâches et activités d'enseignement/apprentissage au regard de l'analyse conceptuelle et des ressources développées

Activité du professeur :

- Il anticipe les erreurs des élèves.
- Il propose l'activité portant sur les prérequis et énonce la consigne.
- Il observe les productions des élèves.
- Il propose des aides de façon individuelle, voire collective si besoin (voir ci-dessous).
- Sur la base de l'analyse des productions des élèves, il rappelle la règle à mobiliser dans ce cas.

Continue en page suivante ▸

Type et contenu des tâches	Activités attendues

Tâches et activités *(suite)*

« Pour additionner deux fractions dont l’une possède un dénominateur multiple du dénominateur de l’autre :
- je ramène à deux fractions ayant pour dénominateur commun le dénominateur le plus grand ;
- j’additionne les numérateurs et je conserve le dénominateur commun. »

Activité de prérequis :

Calculer $\frac{2}{3} + \frac{7}{6}$.

Activités de l’élève :

- Calculer $\frac{2}{3} + \frac{7}{6}$.
- La réalisation de la tâche prescrite nécessite pour l’élève :
  - d’identifier et de se représenter la situation ;
  - de constater que les dénominateurs ne sont pas les mêmes et donc :
    - soit d’appliquer la règle d’addition dans ce cas, s’il la connaît et s’en rappelle (cf. programme 6e) ;
    - soit d’essayer de se représenter la situation, tout d’abord en se posant la question de se ramener à des fractions de mêmes dénominateurs et donc de constater qu’un des dénominateurs est multiple de l’autre et de rechercher une fraction équivalente à $\frac{2}{3}$ ayant 6 comme dénominateur.

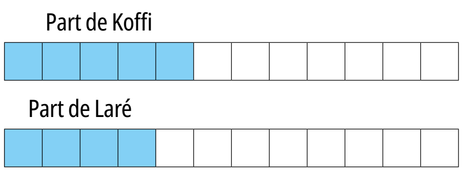
Dans ce dernier cas, il est possible d’évoquer alors des schémas du précédent.

Activité de remédiation :

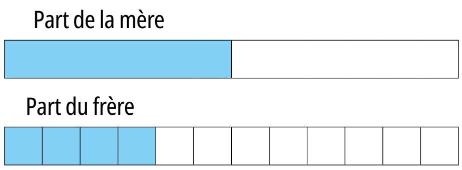
« Le jour de ton anniversaire, ton papa t’offre deux gâteaux découpés chacun en 12 morceaux :

1. Quelle fraction représente un morceau de gâteau ?
2. Pour le premier gâteau, tu offres 5 morceaux à Koffi et 4 morceaux à Laré. Quelle est la fraction du gâteau que tu as offert à tes amis Koffi et Laré ?
3. Pour le deuxième gâteau, tu offres la moitié à ta mère et 4 morceaux à ton petit frère. Quelle est la fraction du gâteau que tu as offert à ta mère et à ton petit frère ? »

Aide pour la question 2 :



Aide pour la question 3 :



Type et contenu des tâches	Activités attendues
Savoirs en jeu	▸ Addition de fractions de même dénominateur. ▸ Addition de fractions de dénominateurs différents. ▸ Fraction égales et fractions équivalentes.

Étape 2 **Phase de réalisation : addition de fractions de dénominateurs différents**

- Activités
- Synthèses

Type et contenu des tâches	Activités attendues
Tâches et activités d'enseignement/ apprentissage au regard de l'analyse conceptuelle et des ressources développées	**Activité du professeur :** ▸ Il propose le calcul : $\frac{17}{30} + \frac{5}{12}$ ▸ Il anticipe les erreurs des élèves. ▸ Il observe les productions des élèves. ▸ Il propose des aides de façon individuelle, voire collective si besoin (voir ci-dessous). ▸ Il organise un moment de synthèse des productions des élèves. ▸ S'il existe des procédures de calcul différentes (notamment si le PPCM est utilisé), le professeur fera comparer ces procédures en termes d'économie (difficulté des calculs, nécessité de réduire la fraction finalement obtenue). ▸ Sur la base de l'analyse des productions des élèves, il rappelle la règle à mobiliser dans le cas général : « Pour additionner deux fractions de dénominateurs différents : – je recherche le PPCM des dénominateurs des fractions ; – je réduis au même dénominateur (PPCM des dénominateurs) les fractions ; – j'additionne les numérateurs et je conserve le dénominateur. » Le professeur pourra revenir sur les calculs des deux étapes précédentes en faisant constater que dans chaque cas le dénominateur est le PPCM des dénominateurs.
Savoirs en jeu	▸ Addition de deux fractions de dénominateurs différents. ▸ Fractions équivalentes, fractions égales. ▸ PPCM.

Étape 3 **Phase d'objectivation/réinvestissement**

- Renforcement
- Intégration
- Conclusion

Type et contenu des tâches	Activités attendues
Tâches et activités d'enseignement/ apprentissage au regard de l'analyse conceptuelle et des ressources développées	« Pour le petit déjeuner, maman donne $\frac{1}{6}$ du pain à Mimi et $\frac{2}{6}$ du pain à Gonto et elle-même prend $\frac{1}{2}$ du pain. Mimi souhaite connaître la fraction du pain que représentent les parts de Mimi et Gonto puis si tout le pain a été utilisé, mais il n'y arrive pas. À partir de tes connaissances, aide-le. » **Activité du professeur et processus de remédiation :** - Propose un exercice d'application de renforcement. - Envisage une remédiation si nécessaire. **Activité mathématique de l'élève :** - Résoud individuellement l'exercice d'application. - Résoud individuellement la situation d'intégration. - Expose ses difficultés à travers leur production.
Contenus d'apprentissage	- Exercice d'application sur la somme de deux fractions de même dénominateur : Exercice 7, p. 185, *CIAM* 5^{e}. « Effectue chacune des sommes suivantes, puis rends irréductible la fraction obtenue : » $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}$; $\frac{3}{7}+\frac{5}{7}$; $\frac{1}{12}+\frac{3}{12}$ $\frac{1}{18}+\frac{5}{18}$; $\frac{1}{9}+\frac{8}{9}$; $\frac{3}{2}+\frac{5}{2}$ - Exercice d'application sur la somme de deux fractions de dénominateurs différents : Exercice 9, p. 185, *CIAM* 5^{e}. « Effectue chacune des sommes suivantes, puis rends irréductible la fraction obtenue : » $\frac{5}{4}+\frac{5}{2}$; $\frac{3}{7}+\frac{3}{5}$; $\frac{1}{6}+\frac{5}{4}$; $\frac{1}{12}+\frac{5}{14}$ $1+\frac{3}{4}$; $2+\frac{5}{3}$; $\frac{5}{7}+3$; $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$ $\frac{5}{8}+\frac{3}{4}+\frac{7}{16}$; $1+\frac{3}{7}+\frac{3}{2}$ - Situation d'intégration sur la somme de deux fractions de même dénominateur. - Situation d'intégration sur la somme de deux fractions de dénominateurs différents. - Idées sur les remédiations.

Étape 4 **Phase d'évaluation**

Type et contenu des tâches	Activités attendues
Tâches et activités d'enseignement/ apprentissage au regard de l'analyse conceptuelle et des ressources développées	**Activité du professeur et processus de remédiation :** ▸ Propose un exercice d'évaluation : « Calcule : » $A = \frac{41}{7} + \frac{9}{7}$; $B = \frac{21}{45} + \frac{17}{45}$; $C = \frac{2}{3} + \frac{5}{12}$ $D = \frac{3}{10} + \frac{17}{4}$; $E = \frac{7}{6} + \frac{3}{10}$; $F = \frac{17}{15} + \frac{5}{12}$ ▸ Prévoit une éventuelle activité de remédiation. **Activité mathématique de l'élève :** ▸ L'élève calcule les sommes en utilisant les règles d'addition de fractions en déterminant si besoin le PPCM des dénominateurs.
Contenus d'apprentissage évalués	▸ Exercice d'évaluation sur la somme de deux fractions de même dénominateur et de dénominateurs différents. ▸ Activité de remédiation sur la somme de deux fractions de même dénominateur et de dénominateurs différents.

12. Exercices d'approfondissement

Type et contenu des tâches	Activités attendues
Exercices séance tenante	**Activité du professeur et processus de remédiation :** ▸ Propose un exercice d'approfondissement : « Calcule : » $G = \frac{4}{13} + \frac{9}{13} + \frac{11}{13}$; $H = \frac{2}{3} + \frac{17}{6} + \frac{5}{12}$ $I = \frac{7}{12} + \frac{11}{12} + \frac{3}{5}$ ▸ Vérifie le travail des élèves, recense leurs erreurs. ▸ Prévoit la remédiation. **Activité mathématique de l'élève :** ▸ Calcule les sommes des fractions en appliquant les règles. ▸ Expose ses difficultés.
Contenus d'apprentissage	▸ Somme de trois fractions de même dénominateur, de différents dénominateurs et dont l'un est multiple de l'autre. ▸ Détermination du PPCM.

Continue en page suivante ▸

Type et contenu des tâches	Activités attendues
Exercices à la maison pour travaux dirigés ultérieurs (application, consolidation des acquis méthodologiques, approfondissement, recherche, projet)	**Activité du professeur et processus de remédiation :** ▸ Propose l’exercice nº 11, p. 185, *CIAM* 5e. « Effectue chacun des calculs suivants, puis rends irréductible la fraction obtenue : » $a = 2 + \frac{1}{3} + \frac{3}{4}$; $b = \frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \frac{13}{5}$ $c = 1 + \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\right)$; $d = \left(1 + \frac{2}{7}\right) - \frac{4}{7}$ $e = \left(\frac{7}{8} - \frac{5}{8}\right) + \frac{1}{8}$; $f = \frac{7}{8} - \left(\frac{5}{8} + \frac{1}{8}\right)$ ▸ Prévoit une activité de remédiation. **Activité mathématique de l’élève :** ▸ Traite l’exercice en utilisant les règles apprises en classe. ▸ Effectue des recherches et transpose la règle de somme à la différence de deux fractions.
Contenus d’apprentissage	▸ Somme des fractions y compris la fraction unitaire. ▸ Somme et différence des fractions.

13. Bilan de la séance

- Bilan de l’enseignant :
- Remédiations effectuées :

13.1 Côté savoir : obstacles/difficultés/erreurs rencontrés en lien avec le savoir en jeu lors de l’exécution de chaque activité à chaque phase

Étape 1 **Phase de mise en situation**

- Obstacles :
- Difficultés :
- Erreurs :

Étape 2 **Phase de réalisation**

- Obstacles :
- Difficultés :
- Erreurs :

Étape 3 **Phase d'objectivation/réinvestissement**

- Obstacles :
- Difficultés :
- Erreurs :

Étape 4 **Phase d'évaluation**

- Obstacles :
- Difficultés :
- Erreurs :

13.2 Côté élèves : obstacles/difficultés/erreurs rencontrés par les élèves lors de l'exécution de chaque activité à chaque phase

Étape 1 **Phase de mise en situation**

- Obstacles :
- Difficultés :
- Erreurs :

Étape 2 **Phase de réalisation**

- Obstacles :
- Difficultés :
- Erreurs :

Étape 3 **Phase d'objectivation/réinvestissement**

- Obstacles :
- Difficultés :
- Erreurs :

Étape 4 **Phase d'évaluation**

- Obstacles :
- Difficultés :
- Erreurs :

13.3 Côté enseignant : obstacles/difficultés/erreurs rencontrés par l'enseignant lors de l'exécution de chaque activité à chaque phase

Étape 1 Phase de mise en situation

- Obstacles :
- Difficultés :
- Erreurs :

Étape 2 Phase de réalisation

- Obstacles :
- Difficultés :
- Erreurs :

Étape 3 Phase d'objectivation/réinvestissement

- Obstacles :
- Difficultés :
- Erreurs :

Étape 4 Phase d'évaluation

- Obstacles :
- Difficultés :
- Erreurs :

3 À PROPOS DE L'ENSEIGNEMENT DE LA NUMÉRATION

3.1 Préambule, la numération de position décimale

La numération de manière générale (Bednarz et Janvier, 1984, 1986, 1988), et la numération de position décimale plus particulièrement, est un concept qui sert à désigner les nombres, à les représenter et à opérer sur eux (Koudogbo, 2013, 2017, 2021 ; Koudogbo, Giroux et René-de-Cotret, 2017). Ce concept est au cœur de l'enseignement et de l'apprentissage de l'arithmétique au primaire, en plus d'être à la base de la construction des concepts dans différents domaines mathématiques : nombres décimaux/fraction décimale, unités de mesure, pourcentages, géométrie et mesure, probabilités et statistiques.

En référant aux travaux de plusieurs didacticiens des mathématiques (Koudogbo, 2013, 2017, 2021 ; Koudogbo, Giroux et René-de-Cotret, 2017), ce concept revêt plusieurs caractéristiques et principes. D'abord, grâce au **principe de la base décimale**, il est possible de compter par groupements réguliers de dix grâce aux dix symboles différents (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) ou en recourant à des symboles oraux, c'est-à-dire des mots-nombres pour représenter tout nombre ou opérer sur les nombres. Un autre principe, celui de **position**, joue un rôle dans l'écriture des nombres. En effet, grâce au principe de position, un seul chiffre est écrit à une position, partant de la droite (unité) vers la gauche (unité supérieure). Le chiffre zéro (0) joue un rôle important : il désigne l'absence d'un groupement d'unités à une position donnée. Ainsi, ce principe s'avère nécessaire, car il renvoie à la **fonction/sens du zéro**. Ensuite, grâce au **principe de la valeur décimale**, chaque chiffre d'un nombre écrit réfère à un nombre inférieur à la base 10. De plus, grâce à ce groupement régulier de dix, le **principe d'échange**, applicable aux opérations sur les nombres, permet de faire des groupements (addition : retenue) ou de les défaire (soustraction : emprunt). Conceptuellement, la numération de position décimale revêt une structure multiplicative qui intègre deux interprétations : l'addition répétée où un groupement peut être répété (deux groupements de 100 par exemple) et une idée d'exponentiation (*i.e.* de groupements de groupements). La valeur associée à chacune des positions dans un nombre correspond, dans un système décimal, à une puissance de 10. Ainsi, la décomposition du nombre 234, par exemple, peut se faire comme suit :

$$234 = (2 \times 10^2) + (3 \times 10^1) + (4 \times 10^0)$$

Les principes, décimal et de position, recouvrent les autres principes de cette numération (Koudogbo *et al.*, 2017).

Par conséquent, ce concept se retrouve dans tous les programmes d'étude en mathématiques des pays africains et d'ailleurs, et est donc enseigné à tous les niveaux scolaires du primaire (voir la cartographie de la notion ci-dessus), avec un prolongement aux autres niveaux secondaires. Nous nous sommes inspirés des ressources produites dans le cadre de l'atelier au Congo pour construire les documents ci-dessous.

Notons que plusieurs études ont révélé que les ressources didactiques destinées aux enseignants – notamment les manuels scolaires – sont structurées de manière à ne travailler que l'aspect « positionnel » de la numération, c'est-à-dire le principe de position, avec l'identification des chiffres à une position donnée (valeur de position décimale), au détriment des autres principes et ce avec les opérations (Koudogbo, 2013, 2017, 2021 ; Koudogbo *et al.*, 2017 ; Tempier, 2013). Or, un tel enseignement ne favorise pas une véritable compréhension, par manque d'articulation avec les autres principes, ainsi que l'établissement de liens entre les principes et les opérations sur les nombres (Bednarz et Janvier, 1984, 1986, 1988 ; Koudogbo, 2013, 2017, 2021).

Considérant ce qui précède, les différentes productions des ateliers sur le concept de numération de position décimale laissent voir que les activités à soumettre aux apprenants semblent majoritairement axées sur le principe de position. C'est pourquoi nous avons choisi de présenter ces ressources, à des fins de formation, en les rédigeant de façon à les décontextualiser et les adapter. Ce faisant, il a été possible de proposer des exemples de différentes ressources de façon à faire apparaître les enjeux conceptuels liés à la numération, à un niveau scolaire donné (la classe de CE2), en ciblant le principe décimal de position qui fonde les activités proposées. De plus, des pistes de remédiations ont été introduites, qui prennent en compte des difficultés pouvant être rattachées aux activités proposées dans la fiche pédagogique, avec l'objectif pour les années suivantes d'aller plus loin dans la maîtrise de ce concept.

Comme mentionné précédemment, nous présentons des ressources, rédigées de façon à les décontextualiser pour la formation. Nous commençons par l'analyse conceptuelle, suivie de la cartographie continuum, puis la carte conceptuelle et, enfin, la fiche pédagogique. Cette dernière inclut des pistes de remédiation en vue de favoriser une réelle conceptualisation pour les élèves en difficulté.

3.2 Exemple d'une analyse conceptuelle à partir de l'outil grille d'analyse conceptuelle

Questions spécifiques au concept pour guider l'analyse conceptuelle	Éléments de réponse
Quelles sont les situations, les activités signifiantes et pertinentes qui permettent l'enseignement et l'apprentissage de la notion ou du concept et qui induisent des activités mathématiques riches (**la référence**) ?	▸ Le dénombrement, l'écriture, la lecture, l'ordre, le classement des nombres. ▸ Toute situation traitant du concept en jeu et donc mobilisant les principes de la numération de position décimale (décimale liée à base 10, de position, d'échange lié aux groupements et aux opérations sur les nombres). ▸ Résolution de problèmes de numération portant sur l'une ou l'autre des opérations sur les nombres.
Quel est spécifiquement le contenu mathématique concerné par les situations signifiantes et pertinentes ?	▸ Principes de position, décimal/base 10. ▸ Valeur de position décimale.
Quelles ressources (matérielles ou autres) peuvent être utilisées pour exploiter les situations signifiantes et pertinentes ?	▸ Le matériel concret/de manipulation. ▸ Le matériel dessiné. ▸ Du numérique.
Quelles difficultés ces ressources ou toute autre variable didactique (par exemple les données numériques) choisies peuvent-elles amener ?	▸ Difficultés mathématiques liées aux obstacles de type épistémologique et donc propres au concept de numération de position décimale (ses principes et caractéristiques). ▸ Difficultés liées aux obstacles de type didactique. ▸ Difficultés liées aux conceptions erronées propres au concept du nombre en tant qu'objet mathématique ou en tant qu'outil.
Quelles sont les techniques, procédures et approches que pourrait mettre en évidence l'apprenant et sur lesquelles reposerait l'opérationnalité des schèmes (**le signifié**) ?	▸ Procédés élémentaires de calcul : dénombrement, comptage un à un, faits numériques ; comptage par groupement de 10. ▸ Échange : groupements (les faire ou les défaire). ▸ Décomposition en base 10.
Quels raisonnements mathématiques possibles l'apprenant peut-il mettre en évidence au regard de ces techniques, procédures et approches ?	▸ Raisonnement fondé sur les propriétés des nombres naturels, la relation +1 (successeur) ; la commutativité, etc. ▸ Raisonnement à partir d'un contrôle sémantique (manipulation d'objets concrets) et raisonnement à partir d'un contrôle numérique, plus abstrait.

Continue en page suivante ▸

Questions spécifiques au concept pour guider l'analyse conceptuelle	Éléments de réponse
Quelles difficultés possibles peuvent être révélées chez l'apprenant au regard de ces techniques, procédures et approches ?	▸ Toute difficulté liée à la non-maîtrise des principes de la numération de position décimale, du concept du nombre et de ses propriétés, du tableau de numération. ▸ Valeur de position non maîtrisée. ▸ Difficultés liées au transcodage digital numéral ou vice versa (connaissances factuelles/connaissances procédurales) : difficultés d'écriture et de lecture. Ex. : au lieu de 11 on écrit dix-un ou on lit dix-un.
Quelles erreurs mathématiques possibles l'apprenant peut-il mettre en évidence au regard de ces techniques, procédures et approches ?	▸ Erreurs générées par l'une ou l'autre des difficultés précédemment énoncées. ▸ Erreurs liées au calcul relationnel (représentation inadéquate du sens de la situation). ▸ Erreurs liées au calcul numérique. ▸ Confusion de l'ordre des grandeurs des unités dans le tableau de numération.
Quelles pourraient être les causes possibles des difficultés que l'apprenant peut rencontrer et des erreurs mathématiques qu'il peut commettre au regard de ces techniques, procédures et approches ?	▸ Non-maîtrise du concept de numération de position décimale et de ses principes imbriqués. ▸ Non-maîtrise de la valeur de position décimale.
Quels sont les ajustements, les relances, c'est-à-dire les interventions possibles à porter pour mieux adapter la situation ou l'activité au niveau des apprenants ou au programme en vigueur ?	▸ Selon le type de difficultés, amener l'apprenant progressivement à saisir les principes fondamentaux de la numération de position décimale, à partir de la manipulation, du travail sur les groupements et des opérations sur les nombres. Retourner au concept du nombre si besoin est. ▸ Écriture des nombres à l'aide du tableau de numération.
Quelles sont les anticipations mathématiques possibles que l'apprenant pourrait faire au regard de ces techniques, procédures et approches ?	▸ Intuition. ▸ Établir des liens avec des connaissances antérieures liées au concept du nombre, les propriétés mathématiques en jeu implicitement. ▸ Langage, vocabulaire mathématique, formes langagières, non langagières.

Questions spécifiques au concept pour guider l’analyse conceptuelle	Éléments de réponse
Quels sont les liens que l’apprenant peut faire avec d’autres concepts mathématiques (vus ou non), au regard des techniques, procédures, et approches, en lien avec le concept à l’étude ?	▸ Les liens mathématiques avec le concept du nombre, les opérations sur les nombres et certains principes de la numération ; et les liens didactiques en matière de contrat didactique (attentes implicites plus qu’explicites...). ▸ Confusion entre les connaissances procédurales *vs* factuelles propre à la numération orale.
Quelles sont les fausses conceptions que l’apprenant pourrait avoir en lien avec le concept à l’étude ?	▸ Prendre le nombre comme un alignement de chiffres sans tenir compte de la structure hiérarchique qui le sous-tend. ▸ Ne pas saisir le sens du principe du zéro qui matérialise une absence de groupement à une position donnée en le considérant comme « rien ». ▸ Formes langagières et non langagières.
Quelles sont les formes langagières qui permettent de verbaliser les propriétés, les situations et les procédures de traitement en lien avec le concept à l’étude (le signifiant) ?	▸ Explicitation des stratégies. Description (en mots) de sa procédure, de son raisonnement, de son procédé personnel de calcul.
Quelles sont les formes non langagières qui permettent de représenter symboliquement les propriétés, les situations et les procédures de traitement en lien avec le concept à l’étude (**le signifiant**) ?	▸ Représentation concrète. ▸ Représentation picturale, schématique ou illustration métaphorique. ▸ Représentation symbolique/illustration à l’aide d’opérations écrites.
Quelles sont les formes langagières qui pourraient être source de difficultés pour l’apprenant ?	▸ Transcodage digital numéral ou vice versa (non-maîtrise des connaissances factuelles/procédurales) : lecture et écriture des nombres en chiffres et en lettres.

3.3 Un exemple d'une cartographie/continuum

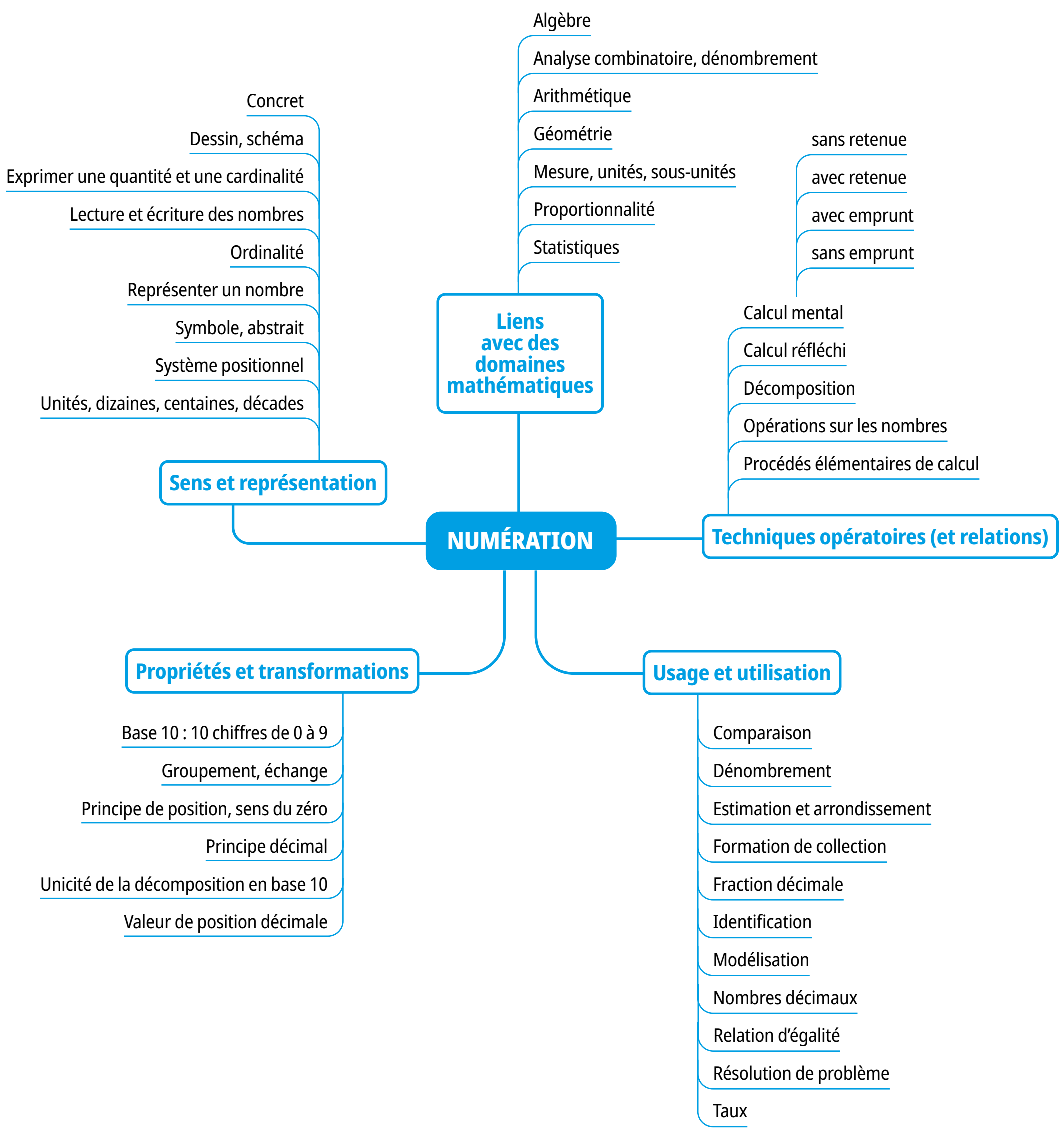
Concept de numération – de position décimale

Catégories	Sous-concepts	CP1	CP2	CE1	CE2	CM1	CM2
Sens et représentation	Écriture du nombre	✗[2]	✗	✗	✗	✗	✗
	Lecture du nombre	✗	✗	✗	✗	✗	✗
	Comparaison	✗	✗	✗	✗	✗	✗
	Ordre	✗	✗	✗	✗	✗	✗
	Classement	✗	✗				
	Identification	✗	✗	✗	✗	✗	✗
	Représentation concrète, imagée/schématisée, à l'écrit, à l'oral ou abstraite du nombre	✗	✗	✗	✗	✗	✗
Techniques opératoires	Décomposition du nombre en base 10	✗	✗	✗	✗	✗	✗
	Calcul mental, calcul réfléchi	✗	✗	✗	✗	✗	✗
	Calcul	✗	✗	✗	✗	✗	✗
	Opération avec retenue (addition)		✗	✗	✗	✗	✗
	Opération sans retenue (addition)	✗	✗	✗	✗	✗	✗
	Opération avec retenue (multiplication)			✗	✗	✗	✗
	Opération sans retenue (multiplication)			✗	✗	✗	✗
	Opération avec emprunt (soustraction)		✗	✗	✗	✗	✗
	Opération sans emprunt (soustraction)		✗	✗	✗	✗	✗
Usage et utilisation (dans des situations spécifiques relevant des concepts à l'étude)	Fraction décimale					✗	✗
	Opérations	✗	✗	✗	✗	✗	✗
	Résolution de problèmes		✗	✗	✗	✗	✗
	Proportionnalité				✗	✗	✗
	Des situations pour :						
	▸ quantifier,	✗	✗	✗	✗	✗	✗
	▸ ordonner, comparer des nombres,				✗	✗	✗
	▸ opérer sur les nombres,	✗	✗	✗	✗	✗	✗

2 Dans la grille, chaque croix matérialise la présence de l'élément en jeu.

Catégories	Sous-concepts	CP1	CP2	CE1	CE2	CM1	CM2
Usage et utilisation *(suite)*	‣ résoudre des problèmes additifs,		✗	✗	✗	✗	✗
	‣ résoudre des problèmes multiplicatifs,			✗	✗	✗	✗
	‣ traiter des groupements et opérer sur des collections,			✗	✗	✗	✗
	‣ traiter des situations de décomposition additive-multiplicative.					✗	✗
Propriétés mathématiques	Groupement	✗					
	Sens de zéro (absence de groupement à une position donnée)	✗	✗	✗	✗	✗	✗
	Valeur de position décimale	✗	✗	✗	✗	✗	✗
	Dix symboles de 0 à 9	✗	✗	✗	✗	✗	✗
	Principe de position	✗	✗	✗	✗	✗	✗
	Principe d'échange, groupements (les faire et les défaire)			✗	✗	✗	✗
Liens avec des domaines mathématiques	Géométrie	✗	✗	✗	✗	✗	✗
	Proportionnalité				✗	✗	✗
	Dénombrement		✗	✗			
	Mesure-unités, sous-unités	✗	✗	✗	✗	✗	✗
	Arithmétique, avec les nombres décimaux et la fraction décimale	✗	✗	✗	✗	✗	✗

3.4 Un exemple d'une carte conceptuelle



3.5 Un exemple d'une fiche pédagogique produite

Fiche pédagogique
(inspirée d'une production du Congo)

- **Classe** : CE2
- **Fiche nº** : 1
- **Date** : 28/10/2021
- **Discipline** : Mathématiques
- **Effectif :** 53 élèves (30 filles ; 23 garçons)
- **Durée :** 50 min
- **Thème :** Numération
- **Matériel :** Tableau de numération
- **Titre :** Identification d'un nombre – principes de position et décimal
- **Documentation :**
  - *Livre programme 2013*, INRAP ;
  - Articles professionnels/scientifiques sur la numération.
- **Objectif général :** Comprendre le système de numération de position décimale.
- **Objectif spécifique :** Identifier un nombre.
- **Objet d'apprentissage :** Identification de la valeur de position d'un chiffre dans un nombre et d'un groupe de chiffres dans un nombre.

Objectif opérationnel	Stratégies d'enseignement	Activités d'apprentissage	Type et mode d'évaluation
À la fin de la leçon portant sur l'identification de la valeur de position d'un chiffre dans un nombre et d'un groupe de chiffres dans le nombre, étant donné un nombre, l'élève doit être capable de dire la valeur de position et celle décimale en jeu.	**Motivation** (*1 min*) : ▸ Présenter un nombre et demander ce que c'est ?	▸ Réponse	▸ Diagnostic mode écrit ▸ Item : *écris le nombre 25 sur ton ardoise.*
	Contrat didactique (*1 min*) : ▸ Énoncer l'objectif opérationnel.	▸ Écoute	
	Vérification des prérequis (*3 min*) : ▸ **Techniques :** tâche. ▸ **Modalité :** travail individuel. ▸ **Consigne :** faire écrire le nombre en chiffres.	▸ Écriture	

Continue en page suivante ▸

<table>
<tr><th>Objectif opérationnel</th><th>Stratégies d'enseignement</th><th>Activités d'apprentissage</th><th>Type et mode d'évaluation</th></tr>
<tr><td rowspan="4">À la fin de la leçon portant sur l'identification de la valeur de position d'un chiffre dans un nombre et d'un groupe de chiffres dans le nombre, étant donné un nombre, l'élève doit être capable de dire la valeur de position et celle décimale en jeu.</td><td colspan="3">ACQUISITIONS NOUVELLES</td></tr>
<tr><td>Manipulation (10 min) :
▸ Technique : manipulation.
▸ Modalité : groupe-classe.
▸ Consigne :
1. Présenter et faire nommer le matériel.
2. Vérifier le matériel individuel.
3. Classer le matériel collectif.
4. Faire classer les matériels individuels.</td><td>1. Observation et nomination
2. Présentation
3. Observation
4. Classement</td><td></td></tr>
<tr><td>Schématisation (10 min) :
▸ Technique : schématisation.
▸ Modalité : groupe-classe.
▸ Consigne :
1. Représenter la situation manipulée.
2. Faire représenter la situation manipulée.
<table><tr><th colspan="3">Classe des milles</th><th colspan="3">Unité simple</th></tr><tr><td>C</td><td>D</td><td>U</td><td>C</td><td>D</td><td>U</td></tr></table>Les nombres entiers s'écrivent avec des chiffres de 0 à 9 et en fonction des principes de position et décimal de la numération. Différents ordres de grandeur des unités caractérisent la structure hiérarchique de ce concept, en plus de l'exponentiation et la structure multiplicative et additive.</td><td>1. Observation
2. Représentation</td><td></td></tr>
<tr><td>Abstraction (20 min) :
▸ Techniques : Écriture et lecture
▸ Modalité : Groupe/classe
▸ Consignes :
1. Écrire le nombre dans le tableau.
2. Faire écrire le nombre.
3. Lire le nombre écrit.
4. Faire lire le nombre écrit.
5. Donner la valeur de position de chaque chiffre dans le nombre.
6. Faire donner la valeur de position de chaque chiffre dans le nombre.
7. Faire dégager ce qu'il faut retenir.
8. Faire faire des exercices oraux et écrits.</td><td>1. Observation
2. Écriture
3. Écoute
4. Lecture
5. Observation
6. Valeur de position
7. Dégagement
8. Exercices</td><td>Type : formatif.
Mode : oral et écrit.
Item :
1. Voici les nombres suivants : 415 ; 12 287 ; 3 005.
– Que représente le chiffre 5 dans le nombre 415 ?
– Que représente 4 dans le nombre 415 ?
– Que représente 1 dans le nombre 415 ?
– Que représente le chiffre 3 dans le nombre 3 005 ?
– Que représente le chiffre 1 dans le nombre 12 287 ?</td></tr>
</table>

Objectif opérationnel	Stratégies d'enseignement	Activités d'apprentissage	Type et mode d'évaluation
À la fin de la leçon portant sur l'identification de la valeur de position d'un chiffre dans un nombre et d'un groupe de chiffres dans le nombre, étant donné un nombre, l'élève doit être capable de dire la valeur de position et celle décimale en jeu.	**Abstraction** (*suite*)		**2.** Sur ton ardoise, écris la valeur de position de chaque chiffre dans les nombres suivants : 7 082 ; 14 005. **3.** Combien y a-t-il de centaines dans le nombre 3 005 ? – Combien y a-t-il de dizaines dans le nombre 415 ? – Combien y a-t-il d'unités dans le nombre 12 287 ?
	Évaluation (*5 min*) : ▸ **Technique :** Exercices. ▸ **Consigne :** Faire faire un exercice d'application.	▸ Exécution	**Type :** formative. **Mode :** écrit/oral. **Item :** sur ton ardoise, écris le rang (la valeur de position) des chiffres 1, 0 et 5 dans le nombre suivant : 12 051. Proposer deux autres nombres (106 ; 4 391) et demander la valeur d'un groupe de chiffres selon différents ordres de grandeur.

- Le professeur fait écrire dans le cahier de l'élève :
  - **Numération :** identification du rang ou de la position décimale des chiffres dans un nombre : unités (U) ; dizaines (D) ; centaines (C) ; unités de mille (U de M ou milliers).
  - **Je retiens :** pour identifier la valeur de position d'un chiffre dans un nombre, on dit sa classe et son rang.
  - **Exemple** : **1 9 7 6**

    U de M – C D U

3.5.1 Pistes de remédiation

L'objectif est de travailler la valeur d'un groupe de chiffres dans le nombre afin d'aider l'apprenant à mieux appréhender le concept de numération de position décimale et ses principes imbriqués.

Difficultés :

1. Lecture d’un nombre comportant un ou plusieurs zéros.
2. Confusion des valeurs de positions du chiffre dans un nombre ou d’un groupe de chiffres dans un nombre ; toutes les difficultés et conceptions erronées introduites en amont. Pour aller plus loin, voir les travaux de Bednarz et Janvier (1984, 1986, 1988), de Koudogbo (2013, 2017, 2021 ; Koudogbo *et al.,* 2017).
3. Écriture d’un nombre fondé sur des erreurs de transcodage numéral-digital (segmentation, répétition, orientation, omission, etc.) : voir les études de Giroux (1991) et Koudogbo (2013).
4. Confusion dans la valeur de position d’un chiffre représenté plus d’une fois dans un nombre ou d’un groupe de chiffres dans un nombre.
5. Etc.

3.5.2 Activités de remédiation

La numération de position décimale intègre la numération écrite/symbolique et la numération orale. C’est un concept qui pose de véritables défis aux apprenants compte tenu du fait qu’il y a un passage d’un système fondé sur des unités à un système fondé sur les groupements et leur valeur (Koudogbo, 2013). Autrement dit, il s’agit du passage d’un système de numération polynomiale (numération orale) à un système de position (numération chiffrée). Dans le système décimal de position écrit avec des chiffres 3 452, les chiffres 3, 4, 5 et 2 représentent les coefficients multiplicatifs des puissances de la base ($3\,452 = 3 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 2 \times 10^0$). La position du chiffre indique le rang et donc la puissance de la base.

En revanche, en numération orale, dans « trois mille quatre cent cinquante-deux », les mots « trois », « quatre » et « deux » représentent des coefficients multiplicatifs des puissances de la base ; « mille » et « cent » représentent des puissances de la base et « cinquante » représente 5×10 (à la fois la puissance de la base 10^1 et le coefficient multiplicateur de 10^1).

De plus, l’absence du zéro dans la numération orale pose des difficultés aux apprenants et constitue donc des sources d’erreurs récurrentes dans le passage de la numération orale à la numération écrite. Enfin, les différents principes que nous avons évoqués ci-dessus viennent complexifier son apprentissage. C’est pourquoi il s’avère pertinent de varier les types de situations permettant de dire les nombres, de les nommer, de les écrire en lettres et en chiffres, mais également de donner du sens au concept en considérant à la fois l’intuition, la manipulation, l’organisation, l’abstraction et la symbolisation.

En matière de remédiation, plusieurs possibilités sont proposées pour amener l’apprenant à construire le concept de numération de position décimale. Les interventions sont à prendre non dans l’ordre où elles apparaissent, dans une logique successive, mais plutôt en fonction du potentiel de l'apprenant, de là où il en est dans ses apprentissages et de ses difficultés. Le recours aux outils technologiques pourrait également être d'un apport indéniable aux différentes remédiations introduites dans les lignes qui suivent.

Revoir le concept du nombre :

- ➜ Considérer le domaine numérique de l'apprenant, possibilité de le dépasser ; tenir compte des particularités des deux systèmes de numération (écrite et orale). Il y a 10 chiffres (0-9) à l'écrit, mais le code numéral (oral) comporte plusieurs mots nombres (zéro et unités : un à neuf ; particuliers : onze à seize ; dizaines : dix à quatre-vingt-dix et multiplicateurs : cent, mille, million, milliard…). Organiser une progression des apprentissages en travaillant d'abord les 10 chiffres (unités) : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ; introduire les particuliers de la deuxième décade 11, 12, 13, 14, 15, 16 ; et les nombres ayant une certaine régularité : 17, 18, 19 ; travailler les décades simples (10, 20, 30, 40, 50, 60…) ; puis les décades complexes (addition : 70 ; multiplication : 80 ; addition et multiplication : 90).
- ➜ Travailler les centaines (1-9) à partir de la relation additive, de somme (exemple : 109, 130) ; (1 300) ; ou celle multiplicative/de produit (200, 900), ou encore celle multiplicative et additive (2 459), etc.
- ➜ Possibilité de recourir à un tableau de nombres tronqués permettant à l'apprenant de le compléter en fonction des lignes, des colonnes, des portions, des diagonales, etc. Ainsi, l'apprenant sera amené à pouvoir surmonter des difficultés liées au changement de décade (voir la portion à compléter concernant une colonne donnée, par exemple, 9, 19, 29, 39, 49 […] 99…). La mise en exergue des décades (prédécesseur, successeur, entre autres) permet de saisir les régularités dans la suite numérique, les relations additives entre les nombres (+1) en lien avec le successeur immédiat ou (–1) pour le prédécesseur immédiat, grâce au tableau de nombres tronqués.
- ➜ Possibilité de réaliser une dictée de nombres (transcodage numéral-digital), de travailler l'écriture en chiffres d'un nombre et en lettres, etc.
- ➜ Penser à l'approche de la numération en travaillant d'autres manières de dire les nombres, de les écrire et d'opérer sur eux, selon le contexte historique ou institutionnel. Cela permet de donner du sens au concept de numération de position décimale et d'en saisir sa structure et sa robustesse.

Afin de mener un travail approfondi pour amener l'apprenant à mieux construire le concept de numération de position décimale :

- ➜ Partir de ce que l'apprenant sait déjà et proposer des situations permettant d'effectuer un travail sur de petites collections, de petites quantités d'objets concrets/dessinés pour les quantifier. Ce qui permet d'approcher le nombre, la cardinalité de manière intuitive ou en recourant à l'apparence, à l'organisation spatiale, à une approche qualitative, l'estimation ou la reconnaissance globale ou subitizing.

- Permettre à l'apprenant de traiter des quantités plus importantes d'objets, en apprenant à mieux les organiser, en les manipulant concrètement, en faisant de différentes manières des groupements, des groupements de groupements, en comparant des quantités, en apprenant à se familiariser avec le système de numération dont les ordres de grandeur (unités, dizaines, centaines, unités de mille, etc.) et la structure hiérarchique fondant ce concept.
- Possibilité d'introduire le tableau de numération pour travailler l'écriture des nombres, en jouant sur différents principes de la numération et sur sa structure multiplicative et additive, et permettre une réelle compréhension. Ainsi, le tableau n'est pas un « truc mathématique » qu'on remplit/utilise, sans en apercevoir le sens sous-jacent.

Exemple

Tableau de numération

Classes :	Milliers			Unités		
Rangs :	C	D	U	C	D	U
	5 Chiffre des centaines de milliers	**4** Chiffre des dizaines de milliers	**1** Chiffre des milliers	**9** Chiffre des centaines	**7** Chiffre des dizaines	**6** Chiffre des unités

- Dans le nombre 541 976 :
  - 5 est le chiffre des centaines de milliers ;
  - 4 est le chiffre des dizaines de milliers ;
  - 1 est le chiffre des milliers ;
  - 9 est le chiffre des centaines ;
  - 7 est le chiffre des dizaines.
  - 6 est le chiffre des unités ;
- Dans le nombre 541 976, combien y a-t-il :
  - d'unités ?
  - de centaines ?
  - 541 976 = ... centaines + ... unités ?

Finalement, il sera possible d'amener l'apprenant à recourir à la symbolisation, à l'abstraction et à la formalisation, grâce à des situations signifiantes permettant de travailler les nombres, les écrire, les lire, opérer sur eux en établissant des liens avec ses connaissances antérieures et en maîtrisant le système de numération de position décimale. Pour ce faire, la résolution de problèmes ou le jeu à usage didactique (exemple : jeu Champion, Koudogbo Adihou, 2002) seront d'une grande portée.

4 BIBLIOGRAPHIE

Bednarz, N. et **Dufour-Janvier, B.** (1984). La numération : Les difficultés suscitées par son apprentissage. *Grand N*, *33*, 5-31.

— (1986). Une étude des conceptions inappropriées développées par les enfants dans l'apprentissage de la numération au primaire. *European Journal of Psychology of Education*, *1*(2), 17-33. http://www.jstor.org/stable/23421949.

— (1988). A Constructivist Approach to Numeration in Primary School: Results of a Three-Year Intervention with the Same Group of Children. *Educational Studies in Mathematics*, *19*, 299-331.

Desjardins, M. et **Hétu, J.-C.** (1974). *L'activité mathématique dans l'enseignement des fractions.* Presses de l'université de Montréal.

Giroux, J. (1991). *Modélisation des connaissances sur la numération et les opérations chez des élèves en première année du primaire* [thèse de doctorat]. Université de Montréal.

Koudogbo Adihou, J. (2002). *Approche du « didactique familial » à travers l'étude des mécanismes topogénétiques et chronogénétiques : deux études de cas* [mémoire de maîtrise]. Université de Genève.

Koudogbo, J. (2013). *Portrait actuel des connaissances d'élèves de troisième année de l'ordre primaire et de situations d'enseignement sur la numération de position décimale* [thèse de doctorat en éducation]. Université du Québec à Montréal.

— (2017). Decimal Number System: Knowledge of Quebec Students Educated under the 2001/1981 Programs and Teaching Situations. *Journal of Mathematics Education, Education for All*, *10*(1), 17-35.

— (2021). La recherche en didactique des mathématiques, un levier pour l'enseignement ? Vers une approche systémique pour développer le potentiel des élèves en difficulté. Dans P. Marchand, A. Adihou, J. Koudogbo, D. Gauthier, et C. Bisson (dir.), *La recherche en didactique des mathématiques et les élèves en difficulté : quels enjeux et quelles perspectives ?* (pp. 53-76), Éditions JFD.

—, **Giroux, J.** et **René-de-Cotret, S.** (2017). La numération de position : Où en sont les connaissances d'élèves québécois ?. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *17*(3), 199-218. https://doi.org/10.1080/14926156.2017.1299893.

Tempier, F. (2013). *La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource* [thèse de doctorat]. Université Paris-Diderot.

CHAPITRE 5

GÉRER LES DIFFICULTÉS DES ÉLÈVES

Analyser les erreurs et penser des activités de remédiation

1 INTRODUCTION

Ce chapitre a pour but d'apporter des informations et des exemples de productions issues de plusieurs ateliers portant sur des questions de remédiation. Si nous rappelons des résultats de recherches acceptés par la communauté des didacticiens sur les erreurs des élèves en général et sur leur traitement, nous n'avons pas ici approfondi la question de l'enseignement s'adressant spécifiquement à des élèves en situation de grande difficulté scolaire (domaine de l'éducation spécialisée) ou de ceux scolarisés dans des contextes d'enseignement en classes à sureffectif (avec les problématiques qui y sont reliées).

En revanche, les exemples illustrant certains choix faits en termes de formation essaient de prendre en compte des conditions d'enseignement spécifiques aux pays concernés d'Afrique subsaharienne.

2 CADRE THÉORIQUE : DES ÉLÉMENTS D'ANALYSE

2.1 Compléments sur les notions de conceptions, erreurs et obstacles

Nous présentons ici des compléments sur les notions de « conception » et de « représentation », thèmes déjà travaillés dans le chapitre 2, ciblant particulièrement les conceptions ayant un domaine de validité restreinte ou pouvant être considérées comme erronées, et se traduisant concrètement par la production d'erreurs chez les élèves concernés.

2.1.1 Conceptions

M. Artigue (1988) va s'appuyer[1] sur la théorie des champs conceptuels de Vergnaud (1991a) en partant de l'idée que la notion de « conception » est analogue à celle du sujet du triplet C = {S, I, L} qui décrit un concept (voir chapitre 2). Toutefois, la conception se distingue du concept par son domaine d'effectivité : les situations qui lui donnent sens et où elle fonctionne efficacement peuvent être en nombre plus limité. Il peut en être de même pour les deux autres composantes.

Cette caractérisation est la référence classique dans les travaux de didactique des mathématiques, lorsqu'on parle de « conception ». Cependant, Artigue elle-même reconnaît que ce modèle n'est pas opératoire, essentiellement parce qu'il est difficile, voire impossible, d'inférer de l'observation de l'élève dans quelques situations la globalité de sa conception sur tel ou tel objet mathématique (Artigue, 1990). De plus, les conceptions peuvent être induites par l'enseignement, mais aussi être d'ordre culturel ou social et donc construites hors du système scolaire. Ce qui est pertinent, c'est « l'identification de conceptions locales qui se manifestent en situation et l'analyse de passage de telle conception locale à telle autre […] ».

Dans la pratique des travaux en didactique, c'est bien la notion de conception locale qui est utilisée et qui se révèle efficace. L'étude des conceptions sur un concept donné peut se faire selon deux approches différentes, qui nous semblent complémentaires :

1 Grenier, D. (octobre 2007). Notes de cours sur le concept de conception. Master 2 R et P IC2A didactique des sciences, UE TC1 Éléments d'épistémologie et de didactique, université de Grenoble.

- À partir de l'analyse d'observations directes de comportements d'élèves en résolution de problèmes, c'est-à-dire à partir de l'analyse de leurs stratégies, discours, productions.
- À partir de l'étude épistémologique du concept, en liaison avec ses différentes définitions et propriétés dans le savoir savant et leur évolution dans l'histoire. On peut par exemple utiliser les conceptions repérées par l'analyse historico- épistémologique pour analyser des observations d'élèves.

Nous pouvons citer les travaux d'Artigue sur le cercle à l'école élémentaire (Artigue et Robinet, 1982), ceux de Sierpinska (1985) sur la notion de « limite » (la tangente comme limite d'une famille de droites), mais il y en a bien d'autres encore.

2.1.2 Erreurs

Pour Astolfi (1997), « la façon de considérer l'erreur dans l'apprentissage a beaucoup évolué ces dernières années. On est globalement passé d'une conception négative donnant lieu à une sanction à une autre, où les erreurs se présentent plutôt comme indices pour comprendre le processus d'apprentissage et comme témoins pour repérer les difficultés des élèves. Sans nier qu'existent des erreurs liées à l'inattention ou au désintérêt ». L'erreur **[2]** ne qualifie pas le résultat, mais la démarche de prise de décision. L'erreur qualifie la connaissance qui a permis la décision lorsqu'elle est identifiable et identifiée.

Pour l'élève, l'interprétation de l'échec dans la résolution d'une tâche en tant qu'erreur nécessite :

- un constat de la non-validité du résultat produit,
- l'attribution de l'échec à des choix qu'il a faits et dont il peut assumer la responsabilité (ce qui implique le rejet de causes comme le hasard, la fatalité, le rejet de la culpabilisation et du dénigrement de soi-même, etc.),
- la recherche d'identification des relations entre choix et résultats,
- une modification de ses choix de manière plus adéquate.

La transformation de l'échec en erreur est la condition d'un progrès, d'un apprentissage. Plusieurs questions se posent alors :

- Faut-il éviter l'erreur ou la provoquer ?
- Quelle doit être la place de l'erreur en classe ? Quel statut lui donner ?
- Quelles sont les sources possibles d'erreurs des élèves en mathématiques ?
- Quel est le statut de l'erreur selon les théories de l'apprentissage : faute, erreur ou obstacle ?

Dans l'ouvrage d'Astolfi (1997), on lit clairement, dans le résumé qui présente l'ouvrage, « qu'il est possible de s'appuyer sur les erreurs commises pour renouveler l'analyse de ce qui se joue dans la classe et pour mieux fonder l'intervention pédagogique et didactique. Ainsi identifie-t-il, en s'appuyant sur de nombreux exemples, huit types d'erreurs pour lesquelles il propose médiations et remédiations ».

Voici les huit types d'erreurs identifiées par Astolfi (1997, pp. 64-66) :

1. Erreurs relevant de la compréhension des consignes de travail.
2. Erreurs relevant d'habitudes scolaires ou d'un mauvais décodage des attentes.
3. Erreurs relevant des conceptions alternatives des élèves.
4. Erreurs liées aux opérations intellectuelles impliquées.
5. Erreurs portant sur les démarches adoptées.
6. Erreurs dues à une surcharge cognitive.
7. Erreurs ayant leur origine dans une autre discipline (transfert non acquis).
8. Erreurs causées par la difficulté propre du contenu.

Brousseau développe également cette nécessité didactique de repenser le statut de l'erreur. Selon Salin (1976) il suggère « [...] le réexamen de l'interprétation des erreurs des élèves et des modalités de leur production. Jusque-là, elles étaient attribuées toutes, soit à des dysfonctionnements erratiques, soit à des absences de connaissances, et donc connotées très négativement ; il faut maintenant envisager les erreurs récurrentes comme le résultat (produit par et construit autour) de conceptions, qui, même lorsqu'elles sont fausses, ne sont pas des accidents, mais des acquisitions souvent positives » (Brousseau, 1998c, cité par Salin, 1976). L'erreur dans ce cas est vue comme un point de départ pour la construction du savoir.

2.1.3 Obstacles

De nombreux travaux de didactique portent sur le concept d'« obstacle ». Ce concept, importé en didactique des mathématiques (Perrin-Glorian, 1993) notamment par Brousseau, a été emprunté à la psychologie cognitive (Piaget, 1967) et à la philosophie (Bachelard, 1938). Il s'agissait d'expliciter la persistance d'erreurs chez les élèves, et la résistance à un traitement par le professeur.

« Un obstacle se manifeste par une famille d'erreurs relatives à un savoir. Ces erreurs sont reproductibles et persistantes. Elles révèlent une connaissance erronée qui a réussi dans tout un domaine d'action, mais qui échoue dans d'autres. Ces erreurs persistent souvent après apprentissage du savoir correct. Le rejet des connaissances qui ont produit ces erreurs fait partie de la connaissance nouvelle » (Brousseau, 1983).

Autrement dit, « il y a obstacle lorsque les conceptions nouvelles à former contredisent les conceptions antérieures bien assises de l'apprenant » (Bednarz et Garnier, 1989). Un obstacle se manifeste donc par des erreurs non pas fugaces et erratiques, mais reproductibles et persistantes. Ces erreurs témoignent d'une connaissance (erronée) qui a réussi dans tout un domaine d'action (mais qui échoue dans d'autres). Elles persistent souvent après l'apprentissage d'un savoir correct. Ce n'est donc pas une connaissance totalement inadaptée. Au contraire, un obstacle résiste parce que c'est une connaissance adaptée à certaines situations et qu'elle permet donc des réussites.

Brousseau distingue trois types d'obstacle : ontogénique, didactique et épistémologique.

- **Les obstacles ontogéniques** : les obstacles d'origine ontogénique proviennent des limitations psychogénétiques (liées à la maturation cognitive) du sujet apprenant à un moment de son développement.
- **Les obstacles épistémologiques** : un obstacle lié au développement historique du concept. La notion d'« obstacle épistémologique » a été introduite par Bachelard (1938).
- **Les obstacles didactiques** : pour l'élève, un obstacle didactique est une représentation de la tâche qu'il doit effectuer due à un enseignement et un apprentissage antérieur. Cette représentation renvoie à une conception qui s'est construite lors de la fréquentation d'une classe limitée de situations organisée par un enseignement. Cette conception s'oppose alors à l'acquisition d'une conception nouvelle plus adaptée à la résolution d'un ensemble plus grand de tâches, dans lesquelles le concept est mobilisé et que l'élève doit savoir résoudre. La notion d'« obstacle didactique » est donc liée aux dispositifs et modèles d'enseignement et, par là, renvoie à la transposition didactique.

  Un exemple souvent cité d'obstacle didactique est celui pouvant se produire lors de l'extension de la multiplication des entiers naturels aux nombres décimaux. Le produit des deux entiers naturels non nuls est toujours supérieur ou égal à chacun des facteurs.

  L'enseignement doit prendre en compte la construction possible d'obstacle de ce type en organisant dans le temps une fréquentation de situations suffisamment variées et riches permettant progressivement la construction du concept dans sa complexité. Ce résultat n'est plus valide et doit donc être relativisé dans le cas de la multiplication des nombres décimaux. Pour cela, le professeur doit anticiper sur une « suradaptation » de l'élève lors de l'apprentissage des entiers, ou bien encore organiser son enseignement des nombres décimaux en vue d'amener l'élève à dépasser cet éventuel obstacle, s'il s'avère exister.

  Cela a amené certains didacticiens à émettre l'idée que la notion d'« obstacle » peut être un levier pour l'apprentissage si le professeur organise son dépassement en recourant à des situations adaptées à cet objectif. Martinand (1986) a ainsi formulé le concept « d'objectif-obstacle ». L'enseignant pense les objectifs de la séquence en prenant en compte les obstacles identifiés et devant être surmontés. Meirieu (1987) reprend cette idée d'objectif-obstacle où l'obstacle est un objectif dont la réalisation permettrait au sujet de franchir un palier décisif de progression en modifiant son système de représentation et en le faisant accéder à un niveau supérieur de formulation.

Posture du professeur et traitement de l'erreur : les obstacles mettent l'élève dans une position d'incapacité, d'incompréhension et d'erreurs qui créent des souffrances. Selon plusieurs didacticiens, erreurs et obstacles sont des sources de difficultés d'enseignement et d'apprentissage chez les élèves et les enseignants (Adihou, 2011). L'erreur nécessite donc un traitement individualisé ou collectif selon la nature de celle-ci, dont une première étape est de redonner confiance à l'enfant pour le mettre en situation d'oser se tromper, et permettre ainsi à l'intervenant de situer son niveau de compréhension. Une autre étape consiste à permettre à l'élève d'identifier son erreur ; ce qui peut nécessiter de sa part la mobilisation de moyens de contrôle.

2.2 Réflexions autour de la notion de « remédiation » : généralités et approches

2.2.1 Des erreurs à la remédiation

Si on adopte le point de vue de Brousseau selon lequel « l'erreur n'est pas seulement l'effet de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard que l'on croit dans les théories empiristes ou béhavioristes de l'apprentissage, mais l'effet d'une connaissance antérieure, qui avait son intérêt, ses succès, mais qui, maintenant, se révèle fausse, ou simplement inadaptée » (Brousseau, 1983, p. 171), alors il est indispensable d'identifier les causes de l'erreur détectée afin d'envisager un traitement didactique. Notons que le traitement de l'erreur peut dépendre souvent des conceptions de l'enseignant et du modèle d'enseignement qu'il adopte (Charnay et Mante, 2016).

Ainsi, dans un modèle d'enseignement transmissif, l'erreur est souvent mise à la charge de l'apprenant qui ne se serait pas assez investi, motivé et qui n'aurait pas mis en œuvre toutes ses compétences. Elle peut même être qualifiée de « faute », terme ayant une connotation morale, voire religieuse. Dans ce contexte, l'erreur sera sanctionnée lors d'une évaluation finale.

Inversement, l'erreur peut être mise à la charge de l'enseignant quand elle est considérée comme un dysfonctionnement dont l'origine serait une mauvaise adaptation de l'enseignement ou des contenus de la formation au niveau des apprenants. Dans cette conception, l'enseignant n'a comme solution que de réécrire la progression, en la décomposant éventuellement en étapes plus aisées à franchir et correspondant à des tâches décomposées en sous-tâches. L'activité de l'apprenant sera alors souvent guidée pas à pas au risque de seulement contourner les erreurs.

En revanche, si l'enseignant considère l'erreur comme un indicateur des processus intellectuels en jeu lors d'un apprentissage – apprentissage passant obligatoirement par des difficultés demandant le remplacement d'anciennes conceptions erronées ou trop partielles des apprenants par de nouvelles –, il sera amené à organiser ces moments et déterminer les modalités de l'intervention didactique à mettre en œuvre.

2.2.2 La remédiation : un processus complexe dont la finalité est de pallier les difficultés d'apprentissage identifiées chez les élèves

La remédiation dérive du verbe « remédier » qui, selon *Le Petit Robert de la Langue Française* (2023), signifie d'abord « apporter **un remède** à…, atténuer ou supprimer les effets néfastes de… ». Une autre définition revient à considérer la remédiation comme une nouvelle médiation au savoir et donc à « construire, à la lumière des lacunes identifiées et dont on a dégagé les causes et les sources, un dispositif d'intervention qui permet de combler ces lacunes. »

La réflexion sur la remédiation, les modes de remédiation et leurs effets sur les apprentissages s'inscrit pour une large part dans un courant constructiviste. Une approche médicale existe aussi, dans laquelle le public ciblé est celui d'élèves présentant des troubles ou des handicaps. Comme nous l'avons déjà signalé, nous ne nous intéressons pas dans ce document à ce type de public relevant de l'éducation spécialisée. Notre propos concerne les élèves présentant des difficultés mais scolarisés dans le système éducatif standard.

La remédiation peut intervenir pendant ou après la séquence d'enseignement[2]. Dehon et Derobertmasure (2008) et Dehon, Derobertmasure et Demeuse (2008) distinguent deux types de remédiation :

1. **Une remédiation immédiate** est entièrement intégrée à la séquence d'enseignement/apprentissage. C'est un processus de régulation « intégrant l'ensemble des opérations métacognitives du sujet et de ses interactions avec l'environnement qui infléchissent ses processus d'apprentissage dans le sens d'un objectif défini de maîtrise » (Perrenoud cité par Deaudelin *et al.*, 2007). Cette régulation peut alors prendre trois formes : proactive (en début d'apprentissage), interactive (en cours de séquence) et rétroactive (en fin de séquence) (Allal, 1988 dans Perrenoud, 1998). Les difficultés concernées par ce mode de remédiation ne relèvent pas d'un traitement spécialisé. S'inscrivant dans le déroulement de la classe, ce type d'intervention s'adresse à l'élève dans le cadre du groupe classe, évitant ainsi le risque d'une stigmatisation du sujet, et se propose d'apporter une réponse directe aux difficultés repérées.

2 Le professeur peut toutefois anticiper des remédiations éventuelles lors de la préparation de la séquence.

2. **Une remédiation différée** « consiste en un traitement portant sur des difficultés parfois "lourdes" et qui peut être confié soit à un maître spécialisé, en dehors de la classe, soit à d'autres personnels, comme dans le cas de la dyslexie ou d'importants retards scolaires. Parfois, une forme moins radicale implique l'enseignant, mais celui-ci propose alors des activités particulières ou adaptées organisées à des moments distincts, hors du cheminement de la séquence d'apprentissage, y compris, par exemple, sous la forme de travaux à domicile… » Les difficultés ciblées par ce type de remédiation peuvent prendre en charge les problèmes antérieurs de l'enfant qui se seraient installés depuis longtemps, ou porter sur des problèmes liés à des troubles d'apprentissage.

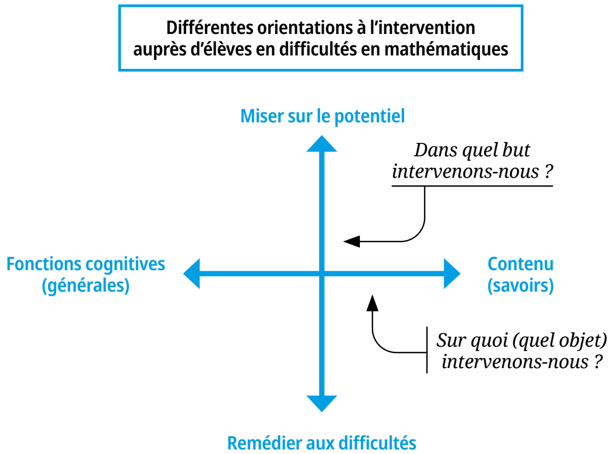
Pour éviter de médicaliser le concept, certains auteurs en éducation comme Deschaux (2003) utilisent le terme « remédiation ». Il s'agit d'utiliser, pour les apprentissages qui posent problème, des stratégies, des méthodes, des techniques et des moyens autres que ceux qui ont « conduit à l'émergence de la difficulté ». Remédier, c'est donc intervenir en proposant une seconde « médiation » (Deschaux, 2003). C'est alors bien la seconde définition du terme « remédiation » (voir définitions du *Petit Robert de la Langue Française*) que nous situons dans notre exposé.

Perspectives pédagogiques et didactiques : il s'agit de mettre en place des dispositifs plus ou moins formels pour : « […] fournir à l'apprenant de nouvelles activités d'apprentissage pour lui permettre de combler les lacunes diagnostiquées lors d'une évaluation formative. On a recours pour cela à différentes propositions pédagogiques, qui pour être efficaces, doivent être sensiblement différentes des méthodes utilisées lors de la phase d'enseignement » (Raynal et Rieunier, 1998). Il s'agit donc d'organiser un ensemble d'actions correctives intégrées au processus d'enseignement et d'apprentissage consistant à aider l'apprenant à surmonter des difficultés qui, négligées, compromettraient la maîtrise des compétences visées. Elle permet d'éviter à l'apprenant d'accumuler les difficultés qui provoqueraient le décrochage scolaire et l'échec scolaire.

Au regard de la didactique des mathématiques, il s'agit d'interventions didactiques (ou orthodidactiques) individuelles ou collectives pour aider les apprenants en difficulté à s'engager dans des situations signifiantes et riches conceptuellement et à les résoudre pour pouvoir progresser dans leurs apprentissages et surtout en vue du développement du potentiel mathématique de chaque apprenant. Pour ce faire, onze principes didactiques (Mary et Squalli, 2021) guident les actions pour soutenir les élèves dans leurs apprentissages. Les travaux récents de chercheurs, notamment au Québec (Marchand, Adihou, Koudogbo *et al.*, 2021), s'inscrivent dans cette perspective. La mise en place de ces types d'interventions se fait au regard des concepts et outils éprouvés en didactique des mathématiques et exploités dans le cadre des formations initiale et continue, en misant sur le potentiel de l'apprenant (voir le schéma suivant[3]).

3 L'intervention est modélisée au travers de deux axes (vertical/horizontal) : l'axe vertical met en évidence « dans quel but intervenons-nous ? » et l'axe horizontal « sur quoi (quel objet) intervenons-nous ? »

Schéma 6 :
Développement du potentiel mathématique de l'apprenant (Mary et Squalli, 2021)



Ainsi, le processus de remédiation qui vise le développement du potentiel mathématique de l'apprenant, la conceptualisation et le développement de la pensée mathématique au travers de la pratique enseignante doit s'appuyer sur un processus de nature didactique qui va de la dévolution à l'institutionnalisation de savoirs, et non l'apport de trucs mathématiques. Dans cette perspective, l'enseignant ou l'intervenant devra conjuguer avec le potentiel de l'élève, c'est-à-dire l'ensemble des forces, des capacités, des ressources dont dispose en puissance l'élève.

Pour y parvenir, le travail de l'enseignant avant, pendant ou après la séquence pourra :

- Faire en sorte que les connaissances se dévoilent.
- Mettre en place des conditions permettant des liens entre ses connaissances (avant, pendant et après).
- Proposer des situations d'enseignement qui prennent en compte les forces de l'élève. Cela permet de tabler sur celles-ci pour travailler autant les difficultés que le potentiel mathématique de l'élève (avant, pendant et après) (Giroux, 2010).
- Proposer des situations d'enseignement ou des résolutions de problèmes tirés des divers domaines mathématiques (avant et pendant).
- S'appuyer sur une analyse conceptuelle en lien avec les apprentissages de l'élève, mais aussi en lien avec l'enseignement reçu (avant).
- Analyser finement les situations d'enseignement (le choix d'un matériel, de données numériques, de tâches bien ciblées, etc.) pour favoriser l'apprentissage (avant et pendant).
- Prendre en compte le contrat didactique (pendant).

De plus, il s'avère nécessaire de réaliser un travail conséquent autour des éléments ci-dessous.

1. Recensement des erreurs (des élèves et créer une banque d'erreurs selon les domaines et les concepts et pointer celles récurrentes).
2. Analyses mathématiques et didactique des erreurs. Il s'agira d'analyser les erreurs récurrentes liées à des items et des domaines : description de l'erreur mathématique, les procédures qui ont conduit à l'erreur, identifier les causes mathématiques et les origines possibles de l'erreur.
3. Identification des concepts et sous-concepts mathématiques qui sont problématiques.
4. Élaboration de ressources et outils pertinents au service de la conceptualisation de l'apprenant.
5. Opérationnaliser ces ressources et outils au travers d'une fiche pédagogique reflet de la pratique enseignante ou supportant la pratique enseignante.

L'élaboration des ressources qui sont exposées ci-dessous vise à outiller l'enseignant lors de ses interventions dans le but de remédier dans une approche didactique (de façon immédiate ou différenciée) aux erreurs et difficultés mais surtout de développer le potentiel des élèves.

Le contenu de la fiche pédagogique vise la remédiation d'un point de vue didactique. Il s'agira ainsi de renseigner cette fiche avec des activités mathématiques riches et en fonction des phases de réalisation d'une séance de classe (mise en situation, réalisation, objectivation) qui concourent au développement conceptuel.

Pour terminer, précisons que lors des ateliers de formation, des tests diagnostiques conçus en fonction des concepts travaillés et visant à provoquer et à recenser des erreurs ont été administrés auprès d'élèves du primaire ou du secondaire. Une grille d'analyse des erreurs (voir chapitre 6, 3.2, p. 181) a été utilisée. Ainsi, des réponses des élèves à des tests diagnostiques et des analyses ont permis de réfléchir à la nature des erreurs produites.

3 BIBLIOGRAPHIE

Adihou, A. (2011). Enseignement/apprentissage des mathématiques et souffrance à l'école. *Les Collectifs du Cirp, Actes du premier colloque international « La souffrance à l'école » du Cercle interdisciplinaire de recherches phénoménologiques*, *2*, 90-102.

Allal, L. (1988). Vers un élargissement de la pédagogie de maîtrise : processus de régulation interactive, rétroactive et proactive. Dans M. Huberman (dir.), *Assurer la réussite des apprentissages scolaires. Les propositions de la pédagogie de maîtrise* (pp. 86-126). Delachaux et Niestlé.

Artigue, M. (1990). Épistémologie et didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *10*(2-3), 241-286.

— (1988). Ingénierie didactique en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *9*(3), 281-308.

— et **Robinet, J.** (1982). Conceptions du cercle chez les enfants de l'école élémentaire. *Recherches en didactique des mathématiques*, *3*(1), 5–64. https://revue-rdm.com/1982/conceptions-du-cercle-chez-les/

Astolfi, J.-P. (1997). *L'erreur, un outil pour enseigner*. ESF.

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique.* Vrin.

Bednarz, N. et **Garnier, C.** (dir.) (1989). *Construction des savoirs, obstacles et conflits.* Agence d'Arc.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *4*(2), 165–198. https://revue-rdm.com/1983/les-obstacles-epistemologiques-et/

Charnay, R. et **Mante, M.** (2016). *Mathématiques. Épreuve écrite d'admissibilité. Tome 2*. Hatier.

Deaudelin, C., **Desjardins, J.**, **Dezutter, O.**, **Thomas, L.**, **Morin, M.-P.**, **Lebrun, J.**, **Hasni, A.** et **Lenoir, Y.** (2007). *Pratiques évaluatives et aide à l'apprentissage des élèves : l'importance des processus de régulation* [rapport de la recherche 2004-AC-95276]. Université de Sherbrooke, Faculté d'éducation, centre de recherche sur l'intervention éducative et le centre de recherche interuniversitaire sur la formation et la profession enseignante.

Dehon, A. et **Derobertmasure, A.** (2008). Outils de remédiation immédiate : Pour plus d'efficacité et d'équité dans le processus d'enseignement à l'école fondamentale. *Efficacité et équité en éducation*.

— et **Demeuse, M.** (2008). *Mise à l'épreuve d'outils de remédiation immédiate dans l'enseignement primaire du Réseau de la communauté française* [rapport intermédiaire 2e année]. Université de Mons-Hainaut, Institut d'administration scolaire, service de méthodologie et formation.

Deschaux, J. (2003). *Aider à apprendre par la remédiation : un pari pour réussir et comprendre à l'école primaire.* Biennale Éducation, Formation.

Giroux, J. (2010). Pour une différenciation de la dyscalculie et des difficultés d'apprentissage en mathématiques. Dans V. Freiman, A. Roy et L. Theis (dir.), *Actes de colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec 2010* (pp. 148-158).

Le Petit Robert (2023). Le Petit Robert de la langue française – Dico en ligne, https://www.lerobert.com/le-petit-robert-de-la-langue-francaise-bienvenue.html.

Marchand, P., **Adihou, A.**, **Koudogbo, J.**, **Gauthier, D.**, et **Bisson, C.** (2021), *La recherche en didactique des mathématiques et les élèves en difficulté : quels enjeux et quelles perspectives ?.* Éditions JFD.

Martinand J.-L. (1986). *Connaître et transformer la matière.* Peter Lang.

Mary, C. et **Squalli, H.** (2021). Miser sur le potentiel mathématique des élèves en difficulté : fondements épistémologiques et didactique. Dans P. Marchand, A. Adihou, J. Koudogbo, D. Gauthier, et C. Bisson (dir.), *La recherche en didactique des mathématiques et les élèves en difficulté : quels enjeux et quelles perspectives ?.* (pp. 13-36). Éditions JFD.

Meirieu, P. (1987). *Apprendre… oui, mais comment ?.* ESF.

Perrenoud, P. (1998). *Où vont les pédagogies différenciées ? Vers l'individualisation du curriculum et des parcours de formation (version française)*. Educar.

Perrin-Glorian, M. J. (1993). Utilisation de la notion d'obstacle en didactique des mathématiques. *Cahier séminaire de recherche/réflexion/interaction*, *1-21*, Grenoble, IUFM.

Piaget, J. (1967). *Logique et connaissance scientifique.* Gallimard.

Raynal, F. et **Rieunier, A.** (1998). Dictionnaire des concepts clés : Apprentissages, formation, psychologie cognitive, 2e éd., ESF.

Salin, M. H. (1976). *Le rôle de l'erreur dans l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire.* Publications de l'IREM de Bordeaux.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en didactique des mathématiques*, *6*(1), 5–67. https://revue-rdm.com/1985/obstacles-epistemologiques/.

Vergnaud, G. (1991a). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, *10*(2-3), 133-170.

CHAPITRE

6

DES OUTILS POUR ANALYSER LES PRATIQUES

1 INTRODUCTION

Deux types d'outils seront présentés ici : une grille d'analyse d'une séance de classe d'une part et un exemple de grille d'analyse des erreurs du test de mathématiques soumis aux élèves et des pistes de remédiation.

2 CADRE THÉORIQUE : DES ÉLÉMENTS POUR ANALYSER LES PRATIQUES ENSEIGNANTES ISSUES DE LA DOUBLE APPROCHE ERGONOMIQUE ET DIDACTIQUE

Robert et Rogalski élaborent au début des années 2000 une théorie puisant sa source dans la théorie de l'activité (Vygotski, Léontiev, Galpérine, etc.) pour analyser les pratiques. Elle se développe ensuite grâce à de nombreux travaux notamment menés dans le cadre du LDAR[1]. Comme pour les autres exposés, nous présentons ci-dessous quelques éléments de cette théorie que nous avons retenus pour animer des séances d'analyse de pratiques lors d'ateliers de formation.

L'une des caractéristiques de cette approche théorique réside dans la nécessité ressentie d'analyser les pratiques d'un enseignant en prenant en compte le fait qu'il effectue un travail, en général rémunéré, et soumis à des contraintes institutionnelles et sociales. Le sujet de l'étude n'est plus seulement un sujet épistémique ou le sujet d'une institution mais aussi un sujet professionnel.

De la théorie de l'activité, les auteures, Robert (2001a et b, 2003) et Robert et Rogalski (2002a et b), retiennent notamment la différence entre « tâche » et « activité ». Léontiev (1984) définit la tâche comme ce qui est à faire, le but à atteindre sous certaines conditions. L'activité est ce que développe un sujet lors de la réalisation de la tâche. Le chercheur n'a pas directement accès à l'activité du sujet. Il peut la restituer à partir de ce qui est visible (les effets, les actions), la gestion de son temps, l'état personnel du sujet

1 Laboratoire de didactique André Revuz.

(charge de travail, fatigue) et de ce qui est restituable (les inférences, les hypothèses, les décisions de faire ou ne pas faire). L'activité est définie du côté du sujet comme un processus qui se développe dans une certaine temporalité, intégrant des processus psychiques (représentations mentales, inférences, hypothèses, etc., du côté du traitement cognitif mais aussi de la gestion émotionnelle) et intégrant des opérations d'interaction avec les objets à transformer et avec les autres humains. Leplat (1997) décrit pour une part l'activité du sujet en déclinant les différentes modifications que subit la tâche prescrite à un professionnel jusqu'à la tâche effectivement réalisée par celui-ci.

Robert et Rogalski (2002a et b) définissent la pratique enseignante comme étant « tout ce que l'enseignant ou l'enseignante met en œuvre **avant, pendant et après la classe** (conceptions activées au moment de la préparation des séances, connaissances diverses, discours mathématique et non mathématique pendant la classe, gestes spécifiques, corrections des productions d'élèves, etc.) » (Robert et Rogalski, 2002b, p. 506).

On considère que l'environnement (classe) a sa propre dynamique et que les actions du sujet (l'enseignant) interagissent avec cette dynamique (Rogalski, 2003). L'enseignant, étant celui qui gère ce système, a une représentation locale de ce qui s'y passe. Il organise son travail à partir des informations prises en cours d'action.

Des composantes permettent de renforcer les pratiques enseignantes. Robert regroupe ces composantes en deux catégories : celles du côté **des activités** des élèves, en d'autres termes des apprentissages, sont les composantes cognitive et médiative ; et celles du côté **du métier**, soit celles qui caractérisent les pratiques, sont la composante personnelle, la composante institutionnelle et la composante sociale.

La composante cognitive : les choix effectués par l'enseignant pour agir sur les connaissances mathématiques des élèves relèvent de la composante cognitive. Cela inclut l'organisation, la quantité relative et la place des tâches prescrites, mais aussi leur insertion dans une progression à long terme et tout ce qui relève de la prévision de gestion de la séance.

La composante médiative : les choix effectués pour favoriser l'enrôlement des élèves, les accompagner dans la réalisation des tâches à effectuer, mais aussi la dévolution des consignes, les moments d'exposition des connaissances, les aides apportées, les improvisations, nourrissent la composante médiative.

Les composantes cognitive et médiative permettent de qualifier les mathématiques fréquentées par les élèves.

La composante personnelle sert à traduire les représentations du professeur, dont font partie sa conception de l'enseignement et de l'apprentissage ainsi que son rapport personnel aux mathématiques. Elle permet aussi de décrire son passé, sa formation mais aussi ses représentations sur ses élèves et sur l'apprentissage des mathématiques.

La composante institutionnelle. Les textes officiels dont font partie les programmes, les diverses contraintes administratives, impactent les pratiques et constituent la composante institutionnelle.

La composante sociale. L'enseignant n'est pas seul. Il est confronté ou intégré à différents groupes sociaux (groupe classe, parents d'élèves, communauté éducative). Cela alimente la composante sociale de son action.

Ces trois composantes, personnelle, institutionnelle et sociale, permettent de décrire les raisons des choix effectués par l'enseignant et les mathématiques qu'il donne à fréquenter aux élèves.

Un élément important de la méthodologie mise en œuvre dans les analyses de pratiques est la mise en relation de l'analyse à priori des activités potentielles que l'on déduit des tâches proposées aux élèves avec celles que l'on induit de l'analyse du déroulement effectif observé. Afin d'analyser les pratiques enseignantes, il convient aussi de mener des analyses à trois niveaux : macro, local (ou méso) et micro. Le niveau macro va permettre d'identifier les grands choix didactiques du professeur (types d'énoncés et de situations proposés, temps de recherche, degré de généralisation et de formalisation, dialectique outil/objet, nombre et qualité, existence de situations de référence). Le niveau local porte davantage sur les tâches et des cheminements cognitifs proposés (on se place au niveau de la séquence ; organisation du cours ciblant un thème). Le niveau micro porte par exemple sur l'analyse de l'activité des élèves provoquées par la réalisation d'une tâche, la gestion d'un moment particulier, les gestes professionnels mobilisés à cette occasion.

3 OUTILS DE FORMATION : DES GRILLES POUR ANALYSER LE RÉEL DE LA CLASSE ET POUR AGIR

3.1 Un exemple de grille d'analyse

Nous présentons en pages suivantes un exemple de grille d'analyse d'une séance de mathématiques élaborée à l'occasion de la mise en œuvre dans le domaine des mathématiques du projet d'amélioration de l'éducation de base en Casamance – PAEBCA – de l'AUF.

Afin d'analyser une séance d'enseignement, il est très utile d'observer trois éléments :

- **La situation proposée aux élèves** : il s'agit d'analyser les tâches proposées en termes d'apprentissages mathématiques des élèves, de savoirs mobilisés, réinvestis ou construits lors de la séance.
- **L'activité du professeur :** quel questionnement développe-t-il ? Quelles aides éventuelles apporte-t-il ? Comment prend-il en compte les élèves et leur production ? Quels savoirs institutionnalise-t-il et comment ?
- **L'activité des élèves** : quelles sont les tâches effectivement réalisées par les élèves ? Correspondent-elles aux tâches prescrites par le professeur ? Quelle place prennent-ils dans la construction du savoir visé ? Quels sont les apprentissages réalisés ?

Exemple de grille d'analyse d'une séance de mathématiques

Dans la grille ci-dessous chaque ligne des colonnes « Indices » et « Analyse » est à renseigner par l'observateur.

La situation, les connaissances mobilisées, les savoirs en jeu
(concerne notamment la préparation de la séance, l'analyse à priori de la situation)

LA SITUATION		L'ENSEIGNANT		LES ÉLÈVES		
Indicateurs	Indices*	Indicateurs	Indices*	Indicateurs	Indices*	Analyse
Quels sont les objectifs de la séance ?		Distingue explicitement et appréhende les objectifs de la séance.				
Préciser s'il s'agit d'objectifs d'apprentissage, ou de réinvestissement (simple application, ou comportant du nouveau).		Annonce les objectifs aux élèves.		Appréhendent et partagent ces objectifs.		

* Déterminés par l'analyse à priori ou à prélever dans le film.

LA SITUATION		L'ENSEIGNANT		LES ÉLÈVES		
Indicateurs	Indices*	Indicateurs	Indices*	Indicateurs	Indices*	Analyse
Sur quoi porte l'apprentissage ou le réinvestissement ? – **Une notion ;** – **Un langage ;** – **Une technique ;** – **Autres.**				▸ Ont déjà fréquenté ou rencontré cet objet d'apprentissage.		
L'apprentissage se fera-t-il : – **par la mise en œuvre d'une situation-problème ?** – **par apport d'information du professeur ?**		▸ Élabore des situations appropriées.		▸ Sont confrontés à une situation demandant de dépasser une réelle difficulté.		
Quelles sont les connaissances (prérequis) indispensables au bon déroulement de la séance ?		▸ A identifié ces connaissances. ▸ A prévu un moment de rappel.		▸ Mobilisent ces connaissances. ▸ Dans le cas d'un moment de rappel, énoncent ces connaissances.		
Quelles sont les savoirs visés par l'enseignant ? En quoi sont-ils nouveaux pour les élèves ?		▸ A identifié ces savoirs.		▸ Ont mobilisé, voire construit en partie au moins, ces savoirs.		
Quels sont les moyens de contrôle de l'élève sur sa démarche ?		▸ A prévu ces moyens de contrôle. ▸ Demande aux élèves de contrôler et comment contrôler la qualité de leur production.		▸ Peuvent contrôler la qualité de leur production.		
Sur quelles variables de la situation ?		▸ Fait un choix conscient de la valeur de ces variables. ▸ Les variables sont judicieusement choisies.		▸ Ces valeurs de variables ont un effet sur les performances des élèves. ▸ Elles ont justifié la mobilisation des connaissances visées.		

* Déterminés par l'analyse à priori ou à prélever dans le film.

Le déroulement de la séance :

la consigne, le temps de recherche, les interactions professeur/élèves, l'institutionnalisation

LA SITUATION		L'ENSEIGNANT		LES ÉLÈVES		
Indicateurs	**Indices***	**Indicateurs**	**Indices***	**Indicateurs**	**Indices***	**Analyse**
La prescription de la tâche		▸ Énonce la consigne sous différentes formes.		▸ Écoutent la consigne ou en prennent connaissance.		
		▸ Explicite la consigne.		▸ Ont compris la tâche à réaliser.		
		▸ Demande aux élèves de la répéter.		▸ Explicitent la consigne (répètent la consigne sous une autre forme, à l'identique).		
		▸ Négocie la consigne à la baisse en donnant trop d'indications aux élèves.		▸ Demandent des explications. ▸ Demandent des aides immédiatement. ▸ Peuvent tous amorcer une ébauche de solution.		
Le temps de recherche des élèves : adéquation de la forme de travail et des interactions avec l'objectif de la séance		▸ Organise un temps de recherche individuel aux élèves.		▸ Cherchent pendant ce temps.		
		▸ Organise un temps de travail collectif.		▸ Certains abandonnent la recherche.		
		▸ Observe les productions des élèves.		▸ Quelles sont les productions individuelles, quelles sont les productions collectives ? ▸ Comment les unes alimentent-elles les autres ? ▸ Correspondent-elles aux prévisions du professeur ? ▸ Quelles sont les productions des élèves : qualité des procédures et des résultats produits, erreurs éventuelles.		
		▸ Aide individuellement les élèves qui en ont besoin. ▸ Apporte des aides techniques. ▸ Assure la compréhension de la tâche. ▸ Intervient sur les erreurs des élèves.		▸ Des élèves demandent de l'aide. ▸ Explicitent ce qu'ils ne comprennent pas. ▸ Demandent une validation de leur production.		
		▸ Change le déroulement prévu (quand ? En fonction de quoi ?).		▸ Profitent de ce changement ? En quoi ?		

* Déterminés par l'analyse à priori ou à prélever dans le film.

LA SITUATION		L'ENSEIGNANT		LES ÉLÈVES		
Indicateurs	Indices*	Indicateurs	Indices*	Indicateurs	Indices*	Analyse
L'explicitation des productions		▸ Désigne des élèves (ce choix est-il pertinent ?)		▸ Les élèves interrogés sont volontaires.		
		▸ Prend souvent (quasi exclusivement) la parole.		▸ Explicitent et justifient suffisamment leur production.		
		▸ Désigne les élèves en fonction de la qualité de leur production.		▸ Les différentes procédures des élèves ou stratégies de résolution sont exposées et étudiées, notamment les procédures primitives (mais justes).		
		▸ Désigne des élèves ayant fait une erreur.		▸ Exposent leurs erreurs.		
		▸ Traite les productions des élèves justes ou partiellement justes (comment ?).		▸ Participent à l'analyse des productions exposées et à leur amélioration.		
		▸ Les met en relation avec la (ou les) procédure(s) expertes attendues.				
		▸ Comment le professeur traite-il effectivement les erreurs des élèves.		▸ Les élèves participent-ils au traitement des erreurs ? Si oui, quels arguments développent-ils ?		
		▸ Se contente-t-il de signaler l'erreur ?				
		▸ Développe différents types d'arguments pour analyser et réfuter les erreurs.		▸ Les élèves prennent conscience de la nature et de la source des erreurs produites.		
		▸ Institutionnalise les savoirs en jeu sous la forme d'un exposé oral.		▸ Gardent la trace de ces savoirs. ▸ Prennent conscience et se les approprient.		
		▸ Institutionnalise les savoirs en jeu sous la forme d'un écrit.				

* Déterminés par l'analyse à priori ou à prélever dans le film.

Structuration du savoir, réinvestissements

LA SITUATION		L'ENSEIGNANT		LES ÉLÈVES		
Indicateurs	**Indices***	**Indicateurs**	**Indices***	**Indicateurs**	**Indices***	**Analyse**
Application stricte		▸ Propose des activités qui sont de simples applications des activités précédentes. ▸ Signale qu'il s'agit d'une simple application.		▸ Reconnaissent seuls qu'il s'agit d'une stricte application des connaissances anciennes. ▸ Prennent conscience de cette qualité.		
Réinvestissement		▸ Propose une activité de réinvestissement comportant des éléments nouveaux concernant par exemple : – les données numériques ou les supports, – le contexte, – la mobilisation et la combinaison de plusieurs connaissances anciennes. ▸ Attire l'attention des élèves sur ces éléments nouveaux ? ▸ Mesure le degré de performance et la qualité des réinvestissements des élèves. ▸ Prend en compte ce niveau de performance pour remédier.		▸ Reconnaissent seuls ce type d'activité et ce qui est nouveau dans l'activité. ▸ Demandent des explications supplémentaires, des aides. ▸ Les élèves prennent conscience de ce qui est nouveau. ▸ Réinvestissent plus ou moins facilement leurs connaissances. ▸ Profitent de ces apports nouveaux.		

* Déterminés par l'analyse à priori ou à prélever dans le film.

3.2 Un exemple de grille d'analyse des erreurs du test de mathématiques soumis aux élèves et des pistes de remédiation

3.2.1 Grille d'analyse des erreurs du test de mathématiques des apprenants

Identification de l'erreur	Nature de l'erreur ou type d'erreur	Description de l'erreur en utilisant les données et les variables	Causes mathématiques expliquant l'erreur	Autres causes possibles ayant occasionné l'erreur	Observations
À quel niveau se situe l'erreur dans le test de mathématique?	Est-ce une erreur de calcul ?	Est-ce que les propriétés mathématiques des opérations sont respectées dans les procédures de traitement ?	Quelles propriétés ou concepts mathématiques à l'origine de l'erreur ?	Est-ce une erreur de nature didactique ?	
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...

3.2.2 Pistes de remédiation

Contenus mathématiques à traiter pour remédier	Types de situations mathématiques à proposer	Approches didactiques et pédagogiques	Variables didactiques à considérer	Observations
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...

4 BIBLIOGRAPHIE

Leontiev, A. (1984 [1975]). *Activité Conscience Personnalité.* Éditions du progrès.

Leplat, J. (1997). *Regards sur l'activité en situation de travail : Contribution à la psychologie ergonomique*. Presses universitaires de France.

Robert, A. (2001a). Recherches sur les pratiques des enseignants de mathématiques du secondaire : imbrication du point de vue de l'apprentissage des élèves et du point de vue de l'exercice du métier d'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques*, *21*(1/2), 7-56.

— (2001b). Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques*, *21*(1/2), 57-80.

— (2003). Un point de vue sur les spécificités du travail géométrique des élèves à partir de la quatrième : l'organisation des connaissances en niveaux de conceptualisation. *Petit x*, *63*, 7-29.

—, et **Rogalski, J.** (2002a). Comment peut-on varier les activités mathématiques des élèves sur les exercices ? Le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion en classe. *Petit x*, *60*, 6-25.

—, et **Rogalski, J.** (2002b). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *La revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies (RCESMT / CJSMTE)*, *2*(4), 505-528.

Rogalski, J. (2003). Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert. *Recherches en didactique des mathématiques*, *23*(3), 343-388.

CONCLUSION GÉNÉRALE

DANS CE GUIDE pour le formateur de formateurs en enseignement des mathématiques, le lecteur pourra trouver à la fois des concepts utilisés en didactique des mathématiques, des outils et ressources pour penser des formations des enseignants, des exemples décontextualisés d'applications de ces outils, ainsi que de nombreuses références bibliographiques et des liens pertinents de sites à usage didactique ou technopédagogique.

Les exposés d'éléments de théories didactiques (théorie des situations didactiques, théorie des champs conceptuels, théorie de l'activité et double approche ergonomique et didactique) ont pour but premier de comprendre les outils pour la formation qui sont développés par la suite. Ce sont aussi des résultats issus de recherches en didactique des mathématiques et en sciences de l'éducation qui renseignent le formateur et l'enseignant sur les démarches d'apprentissage des élèves, sur les situations d'enseignement favorisant ces apprentissages et leur gestion, sur les difficultés que les élèves peuvent rencontrer et sur des pistes d'intervention. Ces concepts permettent au formateur de mieux préparer les enseignants à exercer une vigilance didactique dans la mesure où ils leur servent à lire et gérer le réel de la classe afin de favoriser les apprentissages de leurs élèves ainsi que le développement de leur potentiel mathématique. Les théories didactiques ont servi de cadre et de base pour penser la formation à l'enseignement des mathématiques dans le cadre du programme APPRENDRE. Elles ont permis de nourrir la pratique de formation de près de 2 000 formateurs de formateurs.

La présentation des outils de formation est articulée avec des éléments de théories didactiques éprouvées en recherche et en formation des enseignants. Leur utilisation par les formateurs permettra de mieux comprendre la pratique par la recherche. Ces outils sont illustrés par les exemples (exposés dans le chapitre 4) qui témoignent de leur pertinence, accompagnés par des analyses conceptuelles. Permettant d'éclairer les différentes conceptions associées à un concept, la cartographie/continuum permet aux formateurs d'analyser les programmes officiels et leur évolution, de faire comprendre le processus de transposition didactique propre à ces programmes (lieu de définition et de répartition institutionnelle des savoirs à enseigner). Les catégories structurant la carte conceptuelle éclairent sur les objectifs des alinéas du programme et sur leur place dans les programmations qui en découlent. Le modèle de la fiche pédagogique qui figure dans le chapitre 3 (au sens de modèle à interroger lors de la formation) est construit pour prévoir et expliciter ce qui peut se dérouler avant, pendant et après la classe en relation avec un scénario. Les exemples de fiches pédagogiques ciblant les fractions et la numération (chapitre 4) sont des propositions de situations susceptibles de provoquer les apprentissages attendus par les programmes institutionnels. Les analyses à priori qui peuvent accompagner cet outil sont complétées par la grille d'analyse de séance du chapitre 6, qui permet de mettre en relation scénario, analyse à priori et déroulement effectif. Les grilles d'analyse d'erreurs et de remédiation permettent aux enseignants de proposer des alternatives à des résistances repérées aux apprentissages.

Ce guide propose donc un ensemble de savoirs de formation issus de la rencontre entre recherche et expériences de terrain qui devrait participer de la construction d'une mémoire collective des formateurs. Il ne s'agit pas de savoirs figés mais d'outils pour penser la pratique, qui sont destinés à être enrichis par cette même pratique. Ce guide témoigne de la nécessaire transposition de savoirs de recherche en savoirs de formation mais il contribue aussi à celle-ci.

Notons que les auteurs de ce guide n'ont pas exploré toutes les pistes ouvertes par la démarche didactique qu'ils ont adoptée et mise en pratique. Ils en ont développé des aspects emblématiques. Les auteurs ont aussi eu le souci, lorsqu'ils ont présenté l'exemple de fiches pédagogiques portant sur la numération ou les différents jeux (chapitre 4), de développer des contenus mathématiques à maîtriser dans ces domaines. Finalisés par des questions d'enseignement, ces rappels ont pour but de rappeler les savoirs académiques nécessaires à l'enseignement des notions en jeu dans les situations et leur mise en réseau. Ce volet indispensable de la formation ne pouvait être développé dans ce guide. Il pourrait faire l'objet d'un autre type de document. Signalons que des ateliers de productions de ce dernier type de documents ont eu lieu dans le cadre du programme APPRENDRE au Burkina Faso. Ils ciblaient la formation des enseignants de mathématiques des classes scientifiques de lycée, notamment ceux ayant été recrutés sans une formation initiale suffisante pour maîtriser et enseigner les notions prévues par les programmes de ces classes. Ces ateliers ne sont pas évoqués dans cet ouvrage, mais les auteurs illustrent cette dialectique entre formation mathématique et formation didactique dans leur analyse du jeu Champion (chapitre 3, 4.1.2, activité 6) et du jeu Concertum (chapitre 3, 4.2), et ouvrent ainsi la voie à la production d'un type de ressources complémentaires, dont certaines s'appliqueraient également aux savoirs académiques nécessaires dans l'enseignement fondamental, au primaire, ainsi qu'à celui du niveau collège.

Les propositions de scénarios de formation et de savoirs de formation sont amenées à être complétées lors des différentes actions du programme APPRENDRE. Cela ne sera possible que si les formateurs et les experts des différents pays adhérents au programme se les approprient, les interrogent, les contextualisent et les développent en fonction des spécificités de chaque système éducatif. Mais aussi s'ils interagissent pour construire ensemble des concepts, savoirs et outils partagés par tous les pays adhérents au programme.

BIBLIOGRAPHIE GÉNÉRALE

Sitographie

Adihou, A., **Brisson, O.** et **Leroux, A.-J.** (2019). Conception de ressources didactiques qui articulent des concepts mathématiques et didactiques. *Actes EMF France*, 638-648.

—, **Larguier, M.** et **Bronner, A.** (2020). Raisonnements lors de la résolution de problèmes déconnectés : exemples prototypiques et analyse de productions d'élèves. Dans H. Squalli, I. Oliveira, A. Bronner et M. Larguier (dir.), *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire, recherches et perspectives curriculaires* (pp. 134-162). CRIRES.

Altet, M. (1994). *La formation professionnelle des enseignants.* Presses universitaires de France.

— (2001). Les compétences de l'enseignant professionnel. Dans L. Paquay, M. Altet, E. Charlier et P. Perrenoud (dir.), *Former des enseignants professionnels : quelles stratégies, quelles compétences ?*. De Boeck.

— (2002). Une démarche de recherche sur la pratique enseignante : l'analyse plurielle. *Revue française de pédagogie*, 138, 85-93.

Antibi, A., et **Brousseau, G.** (2000). La dé-transposition de connaissances scolaires. *Recherches en didactique des mathématiques*, *20*(1), 7-40. https://revue-rdm.com/2000/la-de-transposition-de/

Ball, D. (1988). Unlearning to teach mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *8*(1). 40-48.

—, **Bass, H.**, **Sleep, L.** and **Thames, M.** (2005). A Theory of Mathematical Knowledge for Teaching, Work-session presented at ICMI Study 15, Lindoia.

Baruk, S. (1995). *Dictionnaire des mathématiques*. Seuil.

Bednarz, N. (2012). Formation mathématique des enseignants – état des lieux, questions et perspectives. Dans J. Proulx, C. Corriveau et H. Squalli (dir.), *La formation mathématique pour l'enseignement des mathématiques* (pp. 13-54), Presses de l'Université du Québec.

— et **Proulx, J.** (2009). Knowing and Using Mathematics in Teaching: Conceptual and Epistemological Clarifications. *For Learning of Mathematics*, *29*(3), 11-17.

Briand, J. et **Chevalier, M. C.** (2000). Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques. Hatier Pédagogique.

Brousseau, G. (1998c). Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique. Dans G. Brousseau, *La théorie des situations didactiques* (pp. 115-160), La Pensée sauvage.

Butlen, D. (2007). Calcul mental entre sens et technique. Presses universitaires de Franche-Comté, 216-223.

— (2007). *Le calcul mental entre sens et technique : Recherches sur l'enseignement des mathématiques aux élèves en difficulté, du calcul mental à la résolution des problèmes numériques*. Presses universitaires de Franche-Comté.

—, **Masselot, P.**, **Pézard, M.** et **Sayac, N.** (2007). De l'analyse de pratiques à des scénarios de formation : accompagnement en mathématiques des professeurs des écoles nouvellement nommés dans des écoles de milieux défavorisés (ZEP/REP), Rapport de recherche (vol. 1), *Cahier de DIDIREM*, *56*, IREM de Paris 7, Université de Paris 7.

—, **Peltier, M. L.** et **Pézard, M.** (2002). Nommé(s) en REP, comment font-ils ? Pratiques de professeurs des écoles enseignant les mathématiques en ZEP : cohérence et contradictions. *Revue française de pédagogie*, 140, 41-52.

Charles-Pézard, M. (2010). Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *30*(2), 197–261.

Chopin, M.-P. (2005). *Le temps didactique en théorie anthropologique du didactique : quelques remarques méthodologiques à propos des moments de l'étude.* Communication présentée au *1[er] congrès international sur la théorie anthropologique du didactique [TAD], « Société, école et mathématiques : apports de la TAD »*. Récupéré du site du congrès : http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD-frances

Conne, F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *12*(2-3), 221-270.

Douady, R. (1986). Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, *7*(2).

Goos, M. (2008). Sociocultural Perspectives on Learning to Teach Mathematics. Dans B. Jaworski et T. Wood (dir.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education*, *4*, 75-91.

— (2012). Créer des opportunités d'apprentissage dans l'enseignement des mathématiques : un voyage socioculturel. Dans T.-Y. Tso (dir.), *Proceedings of the 36th conference of the international group for the psychology of mathematics education, Vol. 1* (pp. 67-82), PME.

— (2014). Relations entre chercheurs et enseignants et modèles de développement de l'enseignement dans l'enseignement des mathématiques. *ZDM*, *46*(2), 189-200. doi:10.1007/s11858-013-0556-9.

— , **Arvold, B.**, **Berdnaz, N.**, **DeBlois, L.**, **Haheux, J.**, **Morselli, F.** *et al.* (2009). School Experience During Preservice Teacher Education from the Students' Perspective. Dans R. Even et D. L. Ball (dir.), *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics: The 15th ICMI Study* (p. 83Z91). Springer.

— et **Bennison, A.** (2008a). Développer une identité commune en tant que professeurs débutants de mathématiques : émergence d'une communauté de pratique en ligne. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*(1), 41-60. doi:10.1007/s10857-007-9061-9.

— et **Bennison, A.** (2008b). Surveying the Technology Landscape: Teachers' Use of Technology in Secondary Mathematics Classrooms. *Mathematics Education Research Journal*, *20*(3), 102-130.

— et **Geiger, V.** (2000). Towards New Models of Teaching and Learning in Technology Enriched Mathematics Classrooms. Dans W-C. Yang, S-C. Chu et J-C. Chuan (dir.), *Proceedings of the Fifth Asian Technology Conference in Mathematics*. ATCM Inc.

— **Soury-Lavergne, S.**, **Assude, T.**, **Brown, J.**, **Kong, C. Ming**, **Glover, D.**, *et al.* (2010). Teachers and Teaching: Theoretical Perspectives and Issues Concerning Classroom Implementation. Dans C. Hoyles et J. -B. Lagrange (dir.), *Mathematics education and technology-rethinking the terrain* (pp. 311-328). Springer.

Masselot, P., **Butlen, D.**, **Charles-Pézard, M.** (2012). Deux dimensions de l'activité du professeur des écoles exerçant dans des classes de milieux défavorisés : installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique. Dans J.-L. Dorier et S. Gousseau Coutat (dir.), *Actes du colloque EMF 2012*. *Enseignement des mathématiques et contrat social: enjeux et défis pour le xxi[e] siècle*, 362-370, Repéré à http://emf.unige.ch/files/6314/5320/1516/EMF2012GT2MASSELOT.pdf

Perrin-Glorian, M. J. (1993). Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes faibles. *Recherches en didactique des mathématiques*, *13*(1-2), 5-118.

Proulx, J. (2005). “Objectives to work on” vs “Objectives to attain”: A Challenge for Mathematics Teacher Education Curriculum?. Dans R. Lins et A. Olimpio Jr. (dir.), *Contributed Papers, Demonstrations and Worksessions: The Fifteenth ICMI study – The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics*. Sao Paolo, Brazil. CD-ROM.

— et **Bednarz, N.** (2009). Quelle formation mathématique pour les futurs enseignants du secondaire ? Un éclairage fondé sur une analyse des recherches. Dans A. Kuzniak et M. Sokhna (dir.), *Enseignement des mathématiques et développements : enjeux de société et de formation - Actes du 4e colloque international Espace Mathématique Francophone* (pp. 129-142). LIENS, numéro spécial. Repéré à http://emf.unige.ch/files/6014/5322/1761/EMF2009_GT1_Proulx_Bednarz.pdf

Shimizu, Y. (2002). Lesson Study: What, Why, and How?. Dans H. Bass, Z. P. Usiskin et G. Burrill (dir.), *Studying Classroom Teaching as a Medium for Professional Development: Proceedings of a U.S.- Japan workshop* (pp. 53-57, 154-156). National Academy Press.

— (2014). Lesson Study in Mathematics Education. Dans S. Lerman (dir.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 358-360), Springer. Consulté le 17 février 2016, à http://dx.doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_91

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth, *Teaching. Educational Researcher*, *15*(2), 4-14. Consultable en ligne : à http://edr.sagepub.com/cgi/reprint/15/2/4

— (2007[1986]). Ceux qui comprennent. Le développement de la connaissance dans l’enseignement (G. Sensevy et C. Amade-Escot, trad.). *Éducation et didactique*, *1*(1), 97-114. Consulté le 3 janvier 2015, à http://educationdidactique.revues.org/121

Valsiner, J. (1997b). Culture and the Development of Children’s Action (2nd. ed.). Wiley & Son.

Wenger, E. (1998). Communities of Practice Learning, Meaning, and Identity. Cambridge University Press.

Yoshida, M. (2002). Framing Lesson Study for U.S. participants. Dans H. Bass, Z. P. Usiskin et G. Burrill (dir.), *Studying Classroom Teaching as a Medium for Professional Development: Proceedings of a U.S.-Japan Workshop* (pp. 58-64). National Academy Press.

SITOGRAPHIE

- Site de la COPIRELEM, Commission inter-IREM sur l’enseignement des mathématiques à l’école élémentaire : https://www.copirelem.fr
- Site de l’ARPEME, Association pour l’élaboration et la diffusion de ressources pédagogiques sur l’enseignement des mathématiques à l’école : https://www.arpeme.fr/wordpress/
- Site du portail des IREM (ADIREM) : https://www.univ-irem.fr
- Site de l’IREM de Paris : https://irem.u-paris.fr
- Site de ressources développées à l’université de Sherbrooke : Les capsules didactiques : http://ressourcesdidactiquesmathematiques.espaceweb.usherbrooke.ca. On peut accéder aux ressources en utilisant les informations suivantes : Courriel : didactique et mot de passe : capsule.

SITES DE JEUX À USAGE DIDACTIQUE

- http://rire.ctreq.qc.ca/ressources/jeux_educatifs/
- http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/jeux_mat/index.htm
- http://www.alice.org/about/
- https://app-enfant.fr/application/application-geometrie-shapes/
- https://app-enfant.fr/application/sushi-monster-application-gratuite-additionmultiplication/
- https://aqjm.fsg.ulaval.ca/accueil/
- https://developers.google.com/blockly
- https://illuminations.nctm.org/Search.aspx?view=search&type=ac
- https://itunes.apple.com/lu/app/het-honderdbordmontessori/id431045634?l=fr&mt=8
- https://java.com/fr/
- https://jeuxalgebriquesprimaire.weebly.com/activiteacutes-3e-cycle.html
- https://myscript-calculator.fr.uptodown.com/android
- https://netbeans.org/index.html
- https://nrich.maths.org/1140
- https://scratch.mit.edu/
- https://solveme.edc.org/Mobiles.html
- https://ululab.com/fr/slice_fractions/
- https://www.alloprof.qc.ca/fr/eleves/bv/jeux
- https://www.bluej.org/versions.html
- https://www.edokiacademy.com/fr/app-montessori/math/multiplication/
- https://www.engadget.com/2018/05/25/motion-capture-history-video-vicon-siren/
- https://www.greenfoot.org/door
- https://www.jeuxmaths.fr/jeux-de-maths-en-ligne.html
- https://www.lasouris-web.org/primaire/math.html
- https://www.logicieleducatif.fr/math.php
- https://www.mathlearningcenter.org/resources/apps/fractions
- https://www.mathlearningcenter.org/resources/apps/geoboard
- https://www.mathplayground.com/geoboard.html
- https://www.pasco.com/products/software/capstone
- https://www.pasco.com/products/software/matchgraph
- https://www.xsens.com/motion-capture
- https://www.youtube.com/watch?v=Ct9giDrY7wo
- https://www.youtube.com/watch?v=cXBNouXvka0
- https://www.youtube.com/watch?v=ggLWJ2viuxw
- https://www.youtube.com/watch?v=Gh_RxcKDFMU
- https://www.youtube.com/watch?v=GUAAiIrAuno
- https://www.youtube.com/watch?v=hfFZrLe-Rm0
- https://www.youtube.com/watch?v=QERxeWk_bH0
- https://www.youtube.com/watch?v=XYAalLGlE0s
- https://www.youtube.com/watch?v=ynPNr7tZlxc
- https://www.youtube.com/watch?v=zidFb3wzowc55
- https://dgpad.net
- https://www.wolframalpha.com/examples/mathematics

PRÉSENTATION DES AUTEURS

Adolphe Cossi ADIHOU est professeur titulaire de didactique des mathématiques à l'Université de Sherbrooke au Québec (Canada). Ses recherches portent sur le développement de la pensée algébrique, les problématiques relatives aux trucs mathématiques en enseignement et en apprentissage, les difficultés d'enseignement-apprentissage en mathématiques, les pratiques enseignantes et la formation pour l'enseignement des mathématiques au primaire et au secondaire. Impliqué en formation initiale et continue des enseignants, il a conçu des ressources didactiques qui articulent savoirs mathématiques et didactiques dans une approche collaborative. Il est intervenu au Bénin, au Cameroun, au Congo, au Niger et au Togo dans le cadre des missions du groupe thématique d'expertise GTE 4 « Promotion et enseignement des mathématiques et des sciences » en vue du renforcement des compétences en didactique des mathématiques des formateurs de formateurs d'enseignants dans le cadre du projet APPRENDRE.

Denis BUTLEN est chercheur en didactique des mathématiques, professeur émérite de l'université CY Paris Cergy Université et associé au laboratoire de didactique André Revuz. Il est coordinateur du groupe thématique d'expertise GTE 4 « Promotion et enseignement des mathématiques et des sciences » du programme APPRENDRE. Ses travaux concernent principalement l'enseignement des mathématiques aux élèves en difficulté, notamment issus de milieux socialement défavorisés à l'école primaire et au début du collège. Ils s'articulent autour de trois axes principaux. Le premier axe centré sur l'enseignement du calcul mental et de la résolution de problèmes porte sur l'étude des liens entre construction des connaissances, construction du sens et maîtrise des techniques opératoires. Le deuxième axe concerne les pratiques des enseignants exerçant dans le cadre de l'éducation prioritaire (organisation et catégorisation des pratiques, gestes professionnels associés). Le troisième axe porte sur la formation initiale et continue des professeurs des écoles.

Jeanne KOUDOGBO est professeure agrégée de didactique des mathématiques à l'Université de Sherbrooke, au Québec (Canada). Elle a un doctorat de l'Université du Québec à Montréal, un postdoctorat, une formation en orthopédagogie et deux diplômes de maîtrise de l'Université de Genève et de l'UAC (Bénin). Ses travaux de recherche concernent les pratiques enseignantes, les dispositifs novateurs d'aide aux élèves en difficulté, les mécanismes de construction des connaissances, les visées des programmes et des manuels scolaires, les enjeux et finalités de formation mathématique, ainsi que les défis actuels en enseignement-apprentissage des mathématiques. Ses expériences professionnelles portent sur la formation initiale et continue et les programmes de formation. Elle est un membre actif dans plusieurs comités scientifiques et organismes internationaux, dont le groupe thématique d'expertise GTE 4 « Promotion et enseignement des mathématiques et des sciences » du programme APPRENDRE, pour lequel elle a animé plusieurs ateliers de formation de formateurs en Afrique.

Sylvie COPPÉ est retraitée, anciennement maîtresse d'enseignement et de recherche à l'Université de Genève en didactique des mathématiques. Elle participe à la formation des enseignants de mathématiques du primaire et du secondaire. Ses domaines de recherche concernent la résolution de problèmes, l'enseignement de l'algèbre élémentaire, l'évaluation, les ressources, les pratiques enseignantes et la collaboration entre enseignants, formateurs et chercheurs. Membre du groupe thématique d'expertise GTE 4 « Promotion et enseignement des mathématiques et des sciences », elle participe dans ce cadre à la réflexion sur la formation des formateurs et enseignants de mathématiques.

Gervais AFFOGNON est docteur en didactique des mathématiques. Ses recherches ont porté sur les perspectives historiques dans l'enseignement des mathématiques. Il est chargé de cours au lycée et dans les écoles de formation des enseignants et conseiller pédagogique pour le suivi de proximité des enseignants. Membre du groupe thématique d'expertise GTE 4 « Promotion et enseignement des mathématiques et des sciences », il a dirigé dans le cadre du programme APPRENDRE des ateliers de renforcement de capacités en didactique des mathématiques de formateurs de formateurs dans plusieurs pays d'Afrique. Il a également participé à la relecture des programmes de mathématiques des 1re et 2e années du primaire au Bénin.